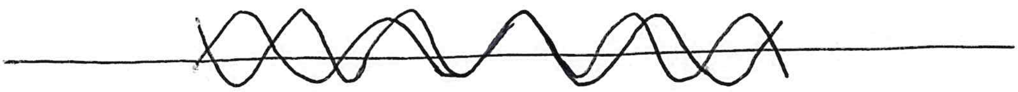
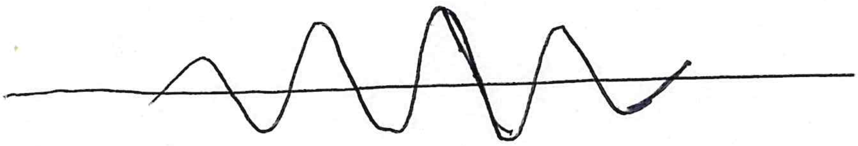
"TEORIA ONDULATORIA DI DE BROGLIE"

E' NOTO DALL'OTTICA CHE IN GENERALE NON E' POSSIBILE AVERE UN'ONDA "PERFETTAMENTE MONOCROMATICA". NORMALMENTE VIENE CONSIDERATO "MONOCROMATICO" UN PACCHETTO DI ONDE LE QUALI HANNO TRA LORO UN MINIMO SCARTO DI FREQUENZA.

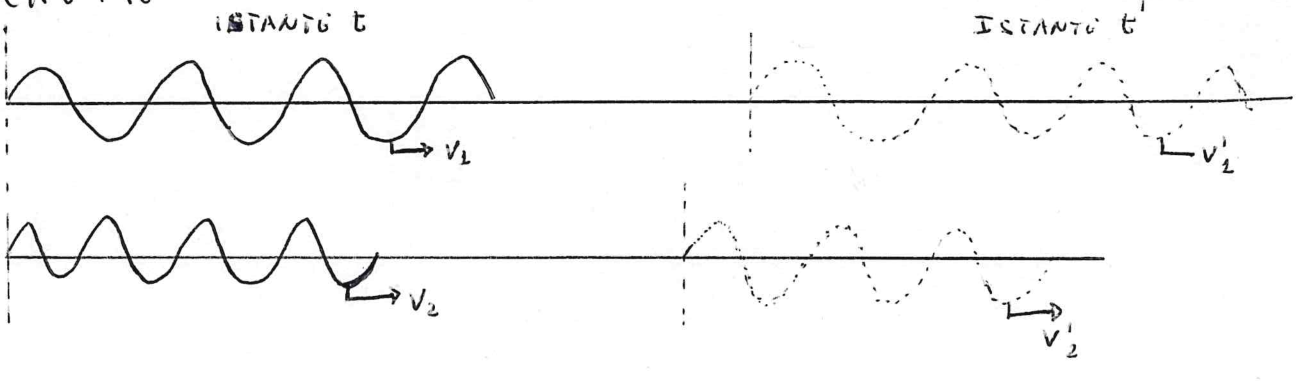


SE QUESTE ONDE SI PROPAGANO IN UN MEZZO "NON DISPERSIVO" ESSE HANNO TUTTE LA STESSA VELOCITA DETTA "VELOCITA' DI FASE". I LORO VALORI SI SOMMANO E DANNO LUOGO A DEI "MASSIMI E MINIMI" CHE VIAGGIANO CON LA MEDESIMA VELOCITA' DELLE ONDE STESSE COSTITUENTI IL "PACCHETTO", TALE VELOCITA' SI DICE "VELOCITA' DI GRUPPO".



SE VICEVERSA LE ONDE SI PROPAGANO IN UN "MEZZO DISPERSIVO", LE SINGOLE VELOCITA' VARIANO CON LA FREQUENZA, DI CONSEGUENZA LA VELOCITA' DI QUESTI MASSIMI E MINIMI (VELOCITA' DI GRUPPO) NON COINCIDE CON QUELLA DELLE SINGOLE ONDE COSTITUENTI IL "PACCHETTO"

ONDE IN UN MEZZO DISPERSIVO



ALLORA SE INDICHIAMO CON ν E λ RISPETTIVAMENTE LA "FREQUENZA MEDIA" E LA "LUNGHEZZA D'ONDA MEDIA" DEI TRENI D'ONDA COSTITUENTI IL PACCHETTO DEFINIREMO

"VELOCITÀ DI FASE" $v = \nu \lambda = \frac{\nu}{k}$ (1) DOVE $k = \frac{1}{\lambda}$

"VELOCITÀ DI GRUPPO" $V = \frac{d\nu}{dk}$ (2)

DALLA (1) ABBIAMO CHE $\nu = k\, v(k)$ DA CUI

$$V = \frac{d\nu}{dk} = \frac{d}{dk}\left[k\, v(k)\right] = v(k) + k\, v'(k) \qquad (3)$$

QUINDI SOLTANTO QUANDO $v'(k) = 0$ CIOÈ QUANDO NON ABBIAMO DISPERSIONE SI OTTIENE LA COINCIDENZA TRA LA VELOCITÀ DI GRUPPO E LA VELOCITÀ DI FASE

$$V = v$$

TEORIA ONDULATORIA DI DE BROGLIE

IL PUNTO DI PARTENZA DELLA TEORIA DI DE BROGLIE NASCE DA ALCUNE ANALOGIE FORMALI ESISTENTI TRA "L'OTTICA GEOMETRICA" E LA "MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE".
IN PARTICOLARE TRA IL "PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE DI MAUPERTIUS" PER LA DESCRIZIONE DEL MOTO DI UNA PARTICELLA ED IL "PRINCIPIO DI FERMAT" PER LA PROPAGAZIONE DELLA LUCE IN OTTICA.

"PRINCIPIO DI AZIONE STAZIONARIA DI MAUPERTIUS"

DATO IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE; PER VARIAZIONI ISOENERGETICHE E AD ESTREMI FISSI, IL PUNTO MATERIALE SI MUOVERÀ NELLO SPAZIO LUNGO UNA TRAETTORIA TALE DA RENDERE STAZIONARIA L'AZIONE "A"

$$A = \sqrt{2m} \int_{S_0}^{S_1} \sqrt{E - U}\, ds \qquad (4) \Rightarrow \delta A = 0$$

DOVE E = ENERGIA TOTALE COSTANTE U = ENERGIA POTENZIALE $U = U(x, y, z)$.

"PRINCIPIO DI FERMAT"

LA LUCE SI PROPAGA IN UN MEZZO CON INDICE DI RIFRAZIONE N VARIABILE LUNGO UN PERCORSO TALE DA CORRISPONDERE AD UN MINIMO CAMMINO OTTICO "C"

$$C = \int_{S_0}^{S_1} N\, ds \qquad (5) \Rightarrow \delta C = 0$$

NOTA: RETRO

DOVE RICORDIAMO CHE $N = \frac{1}{U}$ ESSENDO U = VELOCITA' DI FASE.

DE BROGLIE INTUÌ IN BASE A QUESTA ED AD ALTRE ANALOGIE CHE COME PER LE ONDE ELETTROMAGNETICHE ERA LECITO SPIEGARE DEI "COMPORTAMENTI PARTICELLARI" (EFFETTO FOTOELETTRICO, EFFETTO COMPTON) INTRODUCENDO IL CONCETTO DI ENERGIA QUANTIZZATA (FOTONI), ALLO STESSO MODO ALLE PARTICELLE ELEMENTARI (ELETTRONI, PROTONI, ETC..) ERA LECITO ASSOCIARE DEI PACCHETTI D'ONDA CHIAMATE "ONDE ASSOCIATE ALLA MATERIA" O "ONDE DI DE BROGLIE".

OVVIAMENTE PER FARE CIÒ È NECESSARIO DETERMINARE LE GRANDEZZE CARATTERISTICHE DELLE "ONDE DI DE BROGLIE", QUALI LA FREQUENZA ν E LA LUNGHEZZA D'ONDA λ TROVANDO LA CORRELAZIONE CON LA MASSA E LA VELOCITA' DELLA PARTICELLA.

PER FARE CIÒ DE BROGLIE IPOTIZZÒ CHE IL "PRINCIPIO DI AZIONE STAZIONARIA" ED IL "PRINCIPIO DI FERMAT" DESCRIVANO LO STESSO FENOMENO, COSICCHÈ, AFFINCHÈ

IN REALTA' $n = \frac{c}{v_F}$ PER LA LUCE

DOVE $c = v_F = v_G$ ESSENDO LA VELOCITA' DELLA LUCE CHE SI PROPAGA IN UN MEZZO NON DISPERSIVO, MENTRE v_F (AL DENOMINATORE) E' LA VELOCITA' DI FASE DELLA LUCE CHE SI PROPAGA IN UN MEZZO DISPERSIVO

ANALOGAMENTE PER IL "PACCHETTO" D'ONDA DI DE BROGLIE AVREMO CHE

$$n = \frac{v}{v_F}$$

$cost = v = v_F = v_G$ NEL MEZZO NON DISPERSIVO

v_F "VELOCITA' DI FASE" NEL MEZZO DISPERSIVO

ESSENDO v = COSTANTE QUANDO SI EGUAGLIANO LE DUE FUNZIONI INTEGRANDE SIA v CHE $\sqrt{2m}$ SI POSSONO INGLOBARE DENTRO LA G' DI PROPORZIONALITA'. OSSERVIAMO PERO' CHE LA G' SI ASSUME FUNZIONE DELLA FREQUENZA ν. CIOE' $C = C(\nu)$.

LA TRAIETTORIA DEL PACCHETTO D'ONDA TRA S_0 E S_1 RISULTI COINCIDERE CON QUELLA DELLA PARTICELLA, SI ASSUME CHE

$$N = \frac{1}{v} = c\sqrt{E-U} \qquad (6)$$

ESSENDO c UNA OPPORTUNA COSTANTE (RISPETTO AD x, y, z) DA DETERMINARE. SI OSSERVA CHE IN GENERALE L'INDICE DI RIFRAZIONE $N = N(\nu)$ QUINDI IN GENERALE LE QUANTITA' c ED E SONO ASSUNTE ESSERE FUNZIONI DI ν.

$$c = c(\nu) \qquad E = E(\nu)$$

PER DETERMINARE ESPLICITAMENTE LA $c(\nu)$ DE BROGLIE IMPOSE LE DUE CONDIZIONI

1) LA VELOCITA DI GRUPPO DEL PACCHETTO D'ONDA DEVE COINCIDERE CON LA VELOCITA DELLA PARTICELLA

2) QUESTA COINCIDENZA DEVE VALERE IN TUTTO LO SPAZIO IN MODO CHE L'ESPRESSIONE DETERMINATA NON DIPENDA DALLE COORDINATE SPAZIALI.

DALLA (2) OTTENIAMO CHE

$$\frac{1}{V} = \frac{du}{d\nu} = \frac{d(1/\lambda)}{d\nu}$$

DALLA (1) OTTENIAMO CHE $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{v}\nu = N \cdot \nu$

DA CUI

$$\frac{1}{V} = \frac{d(N\nu)}{d\nu} \qquad (7)$$

DA CUI UTILIZZANDO LA (6)

$$\frac{1}{V} = \frac{d}{d\nu}\left[c\nu\sqrt{E-U}\right] = \frac{d(c\nu)}{d\nu}\sqrt{E-U} + \frac{c\nu}{2\sqrt{E-U}}\frac{dE}{d\nu} \qquad (8)$$

DALLA MECCANICA PARTICELLARE ABBIAMO CHE

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-U} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E-U}} \qquad (9)$$

EGUAGLIANDO QUESTE DUE RELAZIONI OTTENIAMO

$$\frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{E-U}} = \frac{d(c\cdot\nu)}{d\nu}\sqrt{E-U} + \frac{c\nu}{2\sqrt{E-U}}\frac{dE}{d\nu}$$

DA CUI AVREMO

$$\sqrt{2m} = 2\frac{d(c\cdot\nu)}{d\nu}(E-U) + c\nu\frac{dE}{d\nu} \qquad (10)$$

ASSUMENDO CHE QUESTA EGUAGLIANZA SIA VALIDA IN TUTTO LO SPAZIO IN MODO CHE IL COEFFICENTE C NON DIPENDA DALLE COORDINATE SPAZIALI.

NELLA (10) LE COORDINATE $\{x, y, z\}$ FIGURANO SOLTANTO ATTRAVERSO L'ENERGIA POTENZIALE $U = U(x, y, z)$, QUINDI IMPORRE CHE LA (10) SIA UNA IDENTITA' RISPETTO ALLE COORDINATE $\{x, y, z\}$ SIGNIFICHERA' CHE IL COEFFICENTE DELLA FUNZIONE $U(x, y, z)$, NELLA (10), SIA IDENTICAMENTE NULLO. DA CUI

$$\frac{d(c\cdot\nu)}{d\nu} = 0 \Rightarrow c\nu = M = \text{COSTANTE}$$

IN QUESTO MODO DALLA (10) OTTERREMO

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{\sqrt{2m}}{M} = a \qquad (11)$$

DA CUI INTEGRANDO

$$E = a\nu + b \qquad (12)$$

DOVE a E b SONO COSTANTI DA DETERMINARE SPERIMENTALMENTE.

AVREMO INOLTRE CHE

$$c = \frac{H}{\nu} = \frac{\sqrt{2m}}{a\nu}$$ E DA UTILIZZANDO LA (6)

$$\frac{1}{v} = c\sqrt{E-U} = \frac{\sqrt{2m}}{a\nu}\sqrt{E-U}$$

DA CUI CALCOLANDO LA LUNGHEZZA D'ONDA λ

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{a}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{a}{\sqrt{2mT}} = \frac{a}{p} \qquad (13)$$

DA CONSIDERAZIONI DI CARATTERE SPERIMENTALE DE BROGLIE ASSUNSE CHE:

$$a = h \qquad b = 0$$

DA CUI L'ENERGIA E LA LUNGHEZZA D'ONDA ASSOCIATE AL PACCHETTO D'ONDE RISULTERANNO ESSERE IDENTICHE A QUELLE ASSUNTE PER I FOTONI

$$\boxed{E = h\nu} \qquad \boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \qquad (14)$$

OSSERVIAMO INFINE CHE L'ASSOCIAZIONE AL MOTO DI UNA PARTICELLA DI UN "PACCHETTO D'ONDA" ANZICHE' UNA SINGOLA ONDA, NASCE DAL FATTO CHE IN MECC. CLASSICA IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE E' UNA PURA ASTRAZIONE FORMALE. SE INFATTI INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI CORPO MATERIALE COME COSTITUITO DALL'INSIEME DI PIU'

PUNTI MATERIALI, IN MODO ANALOGO NEL CASO ONDULATORIO
VIENE NATURALE CONSIDERARE UN "PACCHETTO D'ONDA" COSTITUITO DA UN INSIEME DISCRETO DI ONDE MATERIALI.

ANALOGIE FORMALI SULLE EQUAZIONI DI EVOLUZIONE.

NEL CASO DELL'OTTICA ONDULATORIA LA QUANTITÀ CHE VIENE OSSERVATA SPERIMENTALMENTE È LA DENSITÀ DI ENERGIA W ASSOCIATA AL CAMPO ELETTROMAGNETICO

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi^2} \qquad (15)$$

DOVE CIASCUNA DELLE 6 COMPONENTI E_i, H_i DOVRÀ SODDISFARE L'EQUAZIONE D'ALAMBERT. AD ESEMPIO

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right] E_x = \Box\, E_x = 0 \qquad (16)$$

CONSIDERANDO UNA ANALOGIA FORMALE IN MECC. QUANTISTICA POSSIAMO INTRODURRE UN CERTO NUMERO N (DA DETERMINARE) DI QUANTITÀ COMPLESSE

$$\{\psi_1, \ldots \psi_N\}$$

DALLE QUALI È POSSIBILE DETERMINARE UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ, OSSERVABILE SPERIMENTALMENTE, IN MANIERA DEL TUTTO ANALOGA ALLA DENSITÀ DI ENERGIA (15); PER MEZZO DELLA RELAZIONE

$$P = \sum_{\ell=1}^{N} |\psi_\ell|^2 \qquad (17)$$

ANALOGAMENTE ALLE COMPONENTI DEL CAMPO ELETTRICO E DEL CAMPO MAGNETICO, CIASCUNA DELLE ψ_ℓ DOVRÀ

SODDISFARE UNA EQUAZ. DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE ANALOGA A QUELLA DELLE ONDE.

DIRAC HA MOSTRATO CHE IL MINIMO NUMERO DI FUNZIONI ψ_s, CON LE QUALI SI PUO' COSTRUIRE UNA MECCANICA ONDULATORIA ADEGUATA AI FATTI SPERIMENTALI E SODDISFACENTE AL PRINCIPIO DI RELATIVITA', E' DATO DA $N=4$.

SE, INVECE CONSIDERIAMO UNA MECC. ONDULATORIA NON RELATIVISTICA, CHE TENGA PERO' CONTO ANCHE DEGLI EFFETTI DERIVANTI DALLO SPIN BASTERANNO DUE FUNZIONI ψ_1, ψ_2 ($N=2$) PER OTTENERE LA "TEORIA DI PAULI". SE INFINE TRASCURIAMO ANCHE GLI EFFETTI DERIVANTI DALLO SPIN, ALLORA BASTERA' UNA SOLA FUNZIONE ψ, ED IN QUESTO CASO AVREMO LA MECC. ONDULATORIA DI SCHRODINGER DOVE LA DENSITA' DI PROBABILITA' E' DEFINITA DA

$$P = \psi \psi^* \qquad (18)$$

SE CONSIDERIAMO QUESTO ULTIMO CASO ED ASSUMIAMO CHE LA ψ SODDISFI UNA EQUAZ. DIFFERENZIALE DEL II° ORDINE ANALOGA A QUELLA D'ALAMBERT AVREMO

$$\left[\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right]\psi = \Box\psi = 0 \qquad (19)$$

DOVE v E' LA VELOCITA' DI FASE. LA ψ SI PROPAGHERA QUINDI COME UN'ONDA DI DE BROGLIE, LA QUALE AMMETTERA' SIGNIFICATO FISICO SOLTANTO IN RELAZIONE AL FATTO CHE IL SUO MODULO QUADRO PERMETTE DI CALCOLARE LA DENSITA' DI PROBABILITA' (18).

RICORDANDO CHE

$$\frac{1}{v} = c\sqrt{E-U} = \frac{\sqrt{2m}}{h\nu}\sqrt{E-U}$$

AVREMO

$$\Delta\psi - \frac{2m}{E^2}(E-U)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (20)$$

DOVE L'ENERGIA DI PARTICELLA HA UN VALORE COSTANTE DETERMINATO CON CERTEZZA ED ASSOCIATO AD UNO STATO STAZIONARIO. CERCHIAMO QUINDI LA ψ NELLA FORMA

$$\psi(\underline{r},t) = \Phi(\underline{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \qquad (21)$$

DOVE LA $\Phi(\underline{r})$ È IN GENERALE UNA FUNZIONE COMPLESSA IL CUI MODULO RAPPRESENTERÀ L'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI DELLA ψ, ed $E = h\nu$. AVREMO COSÌ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2}\psi \qquad (22)$$

SOSTITUENDO LA (22) NELLA (20) AVREMO:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

DA CUI SEMPLIFICANDO

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi(\underline{r}) + (E-U)\Phi(\underline{r}) = 0 \qquad (23)$$

CHE, COME VEDREMO, È PROPRIO L'EQUAZIONE DI SCHRODINGER INDIPENDENTE DAL TEMPO.