EQUAZIONI DI HAMILTON

SE CONSIDERIAMO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE NELLE VARIABILI $\{q^\alpha(t)\}$ AVREMO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, \dots n$$

UN SISTEMA DEL II° ORDINE NELLE $q^\alpha(t)$, CHE POSSIAMO SEMPRE RIDURRE IN UN SISTEMA DI $2n$ EQUAZ. DIFF. ORD. DEL 1° ORDINE NELLA FORMA

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = \eta^\alpha \\ \dfrac{d}{dt}\left\{ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\alpha}(q^\alpha, \eta^\alpha, t)\right\} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}(q^\alpha, \eta^\alpha, t) \end{cases}$$

OVVIAMENTE LE DUE VARIABILI q^α, $\eta^\alpha = \dot q^\alpha$ HANNO RUOLI DIFFERENTI. CERCHEREMO ADESSO DI OTTENERE UN SISTEMA DEL 1° ORDINE QUANTO PIÙ POSSIBILE SIMMETRICO NELLE SUE VARIABILI.

NOTA INTRODUTTIVA:

VEDIAMO COME SI TRASFORMANO LE COMPONENTI DEL VETTORE

$$\{\dot q^\alpha\} \in \Sigma'_t.$$

SE CONSIDERO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$t' = t \qquad q^{\alpha'} = q^{\alpha'}(q^\beta)$$

AVREMO:
$$\dot q^{\alpha'} = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^\beta}\dot q^\beta = A^{\alpha'}{}_\beta \, \dot q^\beta$$

QUINDI LE $\{\dot q^\alpha\}$ SI TRASFORMANO COME COMPONENTI CONTROVARIANTI ESSENDO

$$\begin{cases} \dot q^{\alpha'} = A^{\alpha'}{}_\beta \, \dot q^\beta \\ \dot q^\alpha = A^\alpha{}_{\beta'} \, \dot q^{\beta'} \end{cases} \quad \text{DOVE} \quad A^{\alpha'}{}_\beta = \frac{\partial q^{\alpha'}}{\partial q^\beta} \quad \text{ed} \quad A^\alpha{}_{\beta'} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}}$$

OSSERVIAMO INOLTRE CHE

$$\frac{\partial \dot q^\alpha}{\partial \dot q^{\beta'}} = A^\alpha_{\ \beta'}\, \delta^{\beta'\gamma'} = A^\alpha_{\ \gamma'} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\gamma'}}$$

CIOÈ AVREMO:

$$\boxed{\frac{\partial \dot q^\alpha}{\partial \dot q^{\gamma'}} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\gamma'}} = A^\alpha_{\ \gamma'}}$$

SE QUINDI CONSIDERO UNA FUNZIONE SCALARE

$$f = f(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)$$ NELLE NUOVE COORDINATE AVREMO

$$f = f(q^{\alpha'}, \dot q^{\alpha'}, t')$$

VALUTIAMO COME SI TRASFORMA IL VETTORE DI COMPONENTI

$$\frac{\partial f(q^{\alpha'}, \dot q^{\alpha'}, t')}{\partial \dot q^{\beta'}} = \frac{\partial f(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)}{\partial \dot q^\alpha} \frac{\partial \dot q^\alpha}{\partial \dot q^{\beta'}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \dot q^{\beta'}} = A^\alpha_{\ \beta'} \frac{\partial f}{\partial \dot q^\alpha}}$$

QUESTE COMPONENTI SI TRASFORMANO COME LE COMPONENTI "COVARIANTI" DI UN VETTORE

$$\begin{cases} p_{\beta'} = \dfrac{\partial f}{\partial \dot q^{\beta'}} = A^\alpha_{\ \beta'}\, p_\alpha \\ \\ p_\alpha = A_\alpha^{\ \beta'}\, p_{\beta'} \end{cases}$$ ED ANALOGAMENTE

ALLORA SE CONSIDERO LA LAGRANGIANA $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot q^\alpha, t)$

POSSO DEFINIRE I "MOMENTI CINETICI"

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha}$$

CHE CORRISPONDERANNO ALLE COMPONENTI "COVARIANTI" DI

UN VETTORE NELLO SPAZIO DUALE ALLO SPAZIO TANGENTE Σ.

QUINDI AVREMO CHE

LE $\dot{q}^\alpha \in \Sigma_t$ MENTRE $P_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \in \Sigma_t^*$

ESSENDO Σ_t^* INTERPRETATO COME **LO** SPAZIO DUALE DELLO Σ'_t.

$\longleftrightarrow$

CI CHIEDIAMO SOTTO QUALI CONDIZIONI SIA LECITO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$(1) \qquad \{q^\alpha, \dot{q}^\alpha\} \to \{q^\alpha, P_\alpha\}$$

CIOE' TALE CHE AVVENGA

$$(2) \qquad \dot{q}^\alpha = A^\alpha(q^\gamma, P_\gamma) \qquad \text{ESSENDO } P_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}[q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t]$$

IN QUESTO CASO AVREMO IL SISTEMA DEL I° ORDINE

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{q}^\alpha = A^\alpha(q^\gamma, P_\gamma) \\ \dot{P}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}[q^\gamma, A^\gamma(q^\varepsilon, P_\varepsilon), t] \end{cases}$$

DOVE ABBIAMO SUPPOSTO CHE VALGANO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE ESSENDO:

$$\dot{P}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}$$

PERCHE' **ACCADA** LA (1) DOVRA' VALERE ALMENO LOCALMENTE LA CONDIZIONE DI "NON DEGENERAZIONE"

$$(4) \qquad \det\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ RETRO

VEDIAMO COME POSSIAMO SCRIVERE OPPORTUNAMENTE IL NUOVO SISTEMA (3) INTRODUCENDO LA FUNZIONE DI HAMILTON, TRAMITE LA TRASFORMATA DI LEGENDRE

$$(5) \qquad H(q^\alpha, P_\alpha, t) = A^\kappa(q^\gamma, P_\gamma)P_\kappa - L[q^\gamma, A^\gamma(q^\varepsilon, P_\varepsilon), t]$$

$H = \dot{q}^\kappa P \ldots$

Osserviamo infatti che se considero il cambiamento di variabili $(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \to (q^\alpha, p_\alpha)$ dovremo avere

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha \\ p_\alpha = p_\alpha(q^\beta, \dot{q}^\beta) \end{cases}$$

questo passaggio è lecito quando il determinante della matrice jacobiana

$$J = \frac{\partial(q^\alpha, p_\alpha)}{\partial(q^\beta, \dot{q}^\beta)} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta} & \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} \end{pmatrix}$$

è non nullo, ma

$$\det J = \det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) \neq 0$$

DERIVANDO:

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial q^\alpha} p_\mu} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\gamma}}_{p_\gamma} \frac{\partial A^\gamma}{\partial q^\alpha}} = - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$$

E ASSUMENDO CHE VALGANO LE EQ. DI LAGRANGE $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = \dot p_\alpha$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = - \dot p_\alpha}$$

ANALOGAMENTE:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial p_\alpha} p_\mu} + A^\mu \delta_{\mu\alpha} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\gamma}}_{p_\gamma} \frac{\partial A^\gamma}{\partial p_\alpha}} = A^\alpha = \dot q^\alpha$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot q^\alpha}$$

INFINE

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

CIOE' SE VALGONO LE EQUAZ. DI LAGRANGE CON ASSEGNATE CONDIZIONI INIZIALI $q^\alpha(0)$, $\dot q^\alpha(0)$ ALLORA POSSIAMO PASSARE AL SISTEMA DI $2n$ EQUAZIONI DEL 1° ORDINE

$$(6) \quad \begin{cases} \dot q^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\[2ex] \dot p_\alpha = - \dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases}$$

CON CONDIZIONI INIZIALI (q^α_0, p^α_0)
$\alpha = 1, .. n$

ED INOLTRE SI AVRA' $\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$ (7)

RICORDIAMO CHE SE $\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_\gamma = 0 \Rightarrow$ L'ENERGIA ERA UN INTEGRALE PRIMO

MA SE $\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_\gamma = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_\gamma = 0$ DA CUI $H = H(q^\alpha, p_\alpha) =$ COSTANTE

D'ALTRA PARTE

$$(8) \quad \left.\frac{dH}{dt}\right|_\gamma = \overbrace{\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \dot q^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot p_\alpha}^{=0 \text{ PER LE } (6)} + \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_\gamma = 0 \Rightarrow H = \text{COSTANTE}$$

OSSERVIAMO CHE POSSIAMO PROCEDERE IN MODO INVERSO E VEDERE SOTTO QUALI CONDIZIONI POSSIAMO PASSARE

$$(9) \qquad \{q^\alpha, p_\alpha\} \Rightarrow \{q^\alpha, \dot{q}^\alpha\}$$

$$(10) \qquad p_\alpha = \Pi_\alpha(q^\gamma, \dot{q}^\gamma)$$

IN QUESTO CASO PERCHÉ SIA POSSIBILE LA (9) DOVRÀ VALERE, ALMENO LOCALMENTE, LA CONDIZIONE

$$(11) \qquad \det\left(\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial p_\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ROTRO

POSSIAMO QUINDI PASSARE DALLE $2n$ EQUAZIONI, DEL 1° ORDINE, (6) ALLE EQUAZIONI DI LAGRANGE DEL 2° ORDINE PER LA FUNZIONE DI LAGRANGE DEFINITA TRAMITE LA TRASFORM DI LEGENDRE:

$$L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = \Pi_\kappa(q^\gamma, \dot{q}^\gamma)\dot{q}^\kappa - H[q^\gamma, \Pi_\gamma(q^\varepsilon, \dot{q}^\varepsilon), t]$$

DA CUI DERIVANDO

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \cancel{\frac{\partial \Pi_\kappa}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\kappa} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} - \cancel{\overbrace{\frac{\partial H}{\partial p_\gamma}}^{\dot{q}^\gamma}\frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial q^\alpha}} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \dot{p}_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \cancel{\frac{\partial \Pi_\kappa}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\kappa} + \Pi_\kappa \delta^{\kappa\alpha} - \cancel{\overbrace{\frac{\partial H}{p_\gamma}}^{\dot{q}^\gamma}\frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \dot{q}^\alpha}} = \Pi_\alpha = p_\alpha$$

DA CUI PERTANTO $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right] \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$

INFINE AVREMO CHE $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ DA CUI ESSENDO

$\left.\frac{dH}{dt}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_\gamma$ SE $H =$ COSTANTE $\Rightarrow \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_\gamma = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_\gamma = 0$ QUINDI LA LAGRANGIANA NON DIPENDERÀ ESPLICITAMENTE DA t.

IN QUESTO CASO PASSIAMO DALLE

$$(q^\alpha, p_\alpha) \to (q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$$

CIOÈ

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha \\ \dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(q^\beta, p_\beta) \end{cases}$$

QUESTA TRASFORMAZIONE È ACCETTABILE SE IL DETERMINANTE DELLA ~~MATRICE~~ JACOBIANA

$$J = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \dfrac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\beta} & \dfrac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial p_\beta} \end{pmatrix} = \frac{\partial(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)}{\partial(q^\beta, p_\beta)}$$

È NON NULLO, CIOÈ

$$\det J = \det\left(\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial p_\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right) \neq 0$$

OSSERVIAMO CHE LA "FUNZIONE HAMILTONIANA" $H=H(q^\alpha, p_\alpha, t)$
NON HA LA STESSA DIPENDENZA FUNZIONALE DELLA ENERGIA

$$E=E(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$$

MA IL SUO VALORE NUMERICO COINCIDE.

NOTA:

COME OSSERVATO PRIMA LA FUNZIONE LAGRANGIANA $L=L(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)$ E' DEFINITA IN $A \equiv \Sigma_n \times \Sigma_t \times I$ DOVE $q^\alpha \in \Sigma_n$ $\dot{q}^\alpha \in \Sigma_t$ $t \in I$
OVVERO DATO UN PUNTO $\{q^\alpha\} \in \Sigma_n$ CONSIDERIAMO UNA CURVA CHE PASSA PER QUEL PUNTO E ASSOCIAMO AD OGNI PUNTO DELLA CURVA IL VETTORE TANGENTE DI COMPONENTI $\{\dot{q}^\alpha\}$.
OVVERO POSSIAMO PENSARE DI "INCOLLARE" PUNTO PER PUNTO SULLA CURVA γ IL PIANO TANGENTE ALLA CURVA STESSA.
LA LAGRANGIANA E' QUINDI UNA FUNZIONE DEL PUNTO $\{q^\alpha\} \in \Sigma_n$ E DELLE COMPONENTI DEL VETTORE DELLO SPAZIO TANGENTE $\{\dot{q}^\alpha\} \in \Sigma_t$
LE $\{p_\alpha\}$ SONO LE COMPONENTI "COVARIANTI" DI UN VETTORE CHE POSSIAMO CONSIDERARE COME APPARTENENTE ALLO SPAZIO DUALE Σ_t^* (DELLO SPAZIO TANGENTE Σ_t).
LO SPAZIO DI COORDINATE, COSÍ COSTRUITO, $\{q^\alpha, p_\alpha\}$ VIENE CHIAMATO "SPAZIO DELLE FASI". QUINDI A VOLTE SI DICE CHE: L'INSIEME DI DEFINIZIONE DELLA LAGRANGIANA SI CHIAMA "FIBRATO TANGENTE", MENTRE L'INSIEME DI DEFINIZIONE DELLA HAMILTONIANA SI CHIAMA "FIBRATO COTANGENTE".
QUINDI ALMENO LOCALMENTE NELL'INTORNO DI UN PUNTO SI POTREBBE SCRIVERE CHE

$$H: R^n \times R^n \times R \to R$$

LO SPAZIO DI COORDINATE (q^α, p_α) SI CHIAMA "SPAZIO DELLE FASI" CHE LOCALMENTE E' PROPRIO $R^n \times R^n$.

CALCOLO DELLA HAMILTONIANA TRAMITE LA TRASFORMATA DI LEGENDRE. ESEMPI DI APPLICAZIONI

ESEMPIO N°1: CALCOLO DELLA HAMILTONIANA PER UN SISTEMA MECCANICO SOGGETTO A VINCOLI DIPENDENTI DAL TEMPO E A FORZE CONSERVATIVE

IN QUESTO CASO AVREMO UNA LAGRANGIANA:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + A_\alpha \dot{q}^\alpha + A_0 + U^{(c)}}$$

DOVE IN GENERALE
$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(q^\mu, t) \\ A_\alpha = A_\alpha(q^\mu, t) \\ A_0 = A_0(q^\mu, t) \\ U^{(c)} = U^{(c)}(q^\mu, t) \end{cases}$$

CALCOLIAMO QUINDI:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + A_\alpha = P_\alpha$$

QUINDI $A_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = P_\alpha - A_\alpha$ $\boxed{\text{ESSENDO } \det A_{\alpha\beta} \neq 0} \Rightarrow \exists\, A^{-1}$

DA CUI
$$\underbrace{(A^{\gamma\alpha})^{-1} A_{\alpha\beta}}_{\delta^\gamma_\beta} \dot{q}^\beta = (A^{\gamma\alpha})^{-1} (P_\alpha - A_\alpha)$$

$$\dot{q}^\gamma = (A^{\gamma\alpha})^{-1} (P_\alpha - A_\alpha)$$

COSÌ LA LAGRANGIANA SARÀ ESPRESSA IN FORMA:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} (A^{\alpha\mu})^{-1} (P_\mu - A_\mu) (A^{\beta\lambda})^{-1} (P_\lambda - A_\lambda) + A_\alpha (A^{\alpha\mu})^{-1} (P_\mu - A_\mu) + A_0 + U^{(c)}$$

where $A_{\alpha\beta}(A^{\beta\lambda})^{-1} = \delta_\alpha^\lambda$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A^{\alpha\mu})^{-1} (P_\mu - A_\mu)(P_\alpha - A_\alpha) + A_\alpha (A^{\alpha\mu})^{-1} (P_\mu - A_\mu) + A_0 + U^{(c)}}$$

ALLORA, CONSIDERANDO LA TRASFORMATA DI LEGENDRE:

$$H = \dot{q}^\alpha p_\alpha - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) \qquad \text{AVREMO}$$

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) = (A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)\, p_\alpha - \mathcal{L}$$

DA CUI SOMMANDO E SOTTRAENDO LO STESSO TERMINE

E SOSTITUENDO L'ESPRESSIONE (*) PER LA LAGRANGIANA

$$H = (A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)(p_\alpha - A_\alpha) + \cancel{(A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)} A_\alpha$$
$$- \frac{1}{2} (A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)(p_\alpha - A_\alpha) - \cancel{(A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)} A_\alpha -$$
$$- A_0 - U^{(c)}$$

OTTERREMO L'ESPRESSIONE CERCATA PER L'HAMILTONIANA.

$$\boxed{H(q^\alpha, p_\alpha, t) = \frac{1}{2} (A^{\alpha k})^{-1} (p_k - A_k)(p_\alpha - A_\alpha) - A_0 - U^{(c)}}$$

<u>NOTA</u>: OSSERVIAMO INFINE CHE IL PASSAGGIO DALLA LAGRANGIANA ALLA HAMILTONIANA E' LECITO IN QUANTO

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = A_{\alpha\beta} \qquad \text{ED ESSENDO } \det(A_{\alpha\beta}) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) \neq 0$$

— o —

ESEMPIO N°2 — "HAMILTONIANA DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO"

Sia data la lagrangiana più generale possibile:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \, \dot q^\alpha \dot q_\alpha + q \Phi + \frac{e}{c} A_\alpha \dot q^\alpha$$

In questo caso $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta} = m \, g_{\alpha\beta}$

$\det\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\right) \neq 0 \Leftarrow \det g_{\alpha\beta} \neq 0$

Definiamo l'impulso generalizzato

$$P_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\alpha} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \, g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta + \frac{e}{c} A_\alpha \dot q^\alpha + q \Phi$$

Avremo, quindi, derivando la $\mathcal{L}$:

$$P_\alpha = m \, g_{\alpha\beta} \dot q^\beta + \frac{e}{c} A_\alpha \Rightarrow \left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right) = m \, g_{\alpha\beta} \dot q^\beta$$

Da cui:

$$\underbrace{g^{\gamma\alpha} g_{\alpha\beta}}_{\delta^\gamma_\beta} \dot q^\beta = \frac{1}{m} g^{\gamma\alpha} \left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right)$$

$$\dot q^\gamma = \frac{1}{m} \left(P^\gamma - \frac{e}{c} A^\gamma\right) \qquad \left(\dot q_\gamma = \frac{1}{m} \left(P_\gamma - \frac{e}{c} A_\gamma\right) \right)$$

Possiamo così esprimere la lagrangiana in termini di P_α e q^α:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right) + \frac{1}{m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(\frac{e}{c} A_\alpha\right) + q \Phi$$

Da cui:

$$H = \dot q^\alpha P_\alpha - \mathcal{L} = \frac{1}{m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right) +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(\frac{e}{c} A_\alpha\right)} - \frac{1}{2m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right)$$

$$- \cancel{\frac{1}{m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(\frac{e}{c} A_\alpha\right)} - q \Phi$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m} \left(P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha\right)\left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha\right) - q \Phi}$$

ESEMPIO N°3 "PARTICELLA VINCOLATA A MUOVERSI SU UNA SUPERFICIE SFERICA SOGGETTA AD UN POTENZIALE $U(\theta,\varphi)$"

DATA LA LAGRANGIANA: $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(\theta,\varphi)}$

DALLE COORDINATE SFERICHE AVREMO:

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - R\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + R\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

DA CUI QUADRANDO E SOMMANDO

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2]$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2] + U(\theta,\varphi)} \quad (*)$$

$$\begin{cases} P_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \\ P_\varphi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{P_\theta}{mR^2} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{P_\varphi}{mR^2\sin^2\theta} \end{cases} \quad (**)$$

IN QUESTO MODO SE RIVALUTIAMO LA LAGRANGIANA AVREMO

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{1}{mR^2}\left[P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] + U(\theta,\varphi)} \quad (***)$$

SE QUINDI CALCOLIAMO $\boxed{H = \dot{\theta} P_\theta + \dot{\varphi} P_\varphi - \mathcal{L}}$ OTTERREMO

$$H = \frac{1}{mR^2}\left[P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{mR^2}\left[P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] - U(\theta,\varphi)$$

E QUINDI NELLA SUA FORMA FINALE:

$$\boxed{H(\theta,\varphi,P_\theta,P_\varphi) = \frac{1}{2mR^2}\left[P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] - U(\theta,\varphi)}$$

NOTA: ANCHE IN QUESTO CASO:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}^\alpha \partial \dot{\varphi}^\beta} = \begin{pmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) = (mR^2)^2\sin^2\theta \neq 0$$

EQUAZIONI DI HAMILTON DEDOTTE DA UN PRINCIPIO VARIAZIONALE

DALLA DEFINIZIONE DI $H = p_\alpha \dot{q}^\alpha_* - L$ POSSIAMO SCRIVERE

LA LAGRANGIANA $L = p_\alpha \dot{q}^\alpha_* - H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ E

DEFINIAMO IL SEGUENTE FUNZIONALE NELLO SPAZIO DELLE FASI

$$S(\gamma, A, B) : \bar{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$$

DOVE $\bar{\mathcal{H}}$ È L'INSIEME DI TUTTE LE CURVE REGOLARI Γ, CONTENUTE NELLO SPAZIO DELLE FASI, DI ESTREMI A e B ASSEGNATI

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ p_\alpha \dot{q}^\alpha_* - H(q^\alpha_*, p_\alpha, t) \right\} dt$$

DOVE IN GENERALE INDICHIAMO CON $\bar{\gamma}$ LA CURVA DI ESTREMI A B DESCRITTA DALLE EQUAZIONI PARAMETRICHE

$$\bar{\gamma} : \begin{cases} q^\alpha_* = \bar{q}^\alpha_*(t) \\ p_\alpha = \bar{p}_\alpha(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1] \qquad \begin{aligned} A &\equiv [\bar{q}^\alpha_*(t_0), \bar{p}_\alpha(t_0)] \\ B &\equiv [\bar{q}^\alpha_*(t_1), \bar{p}_\alpha(t_1)] \end{aligned}$$

MENTRE SE INDICHIAMO CON γ LA "DEFORMAZIONE" DI $\bar{\gamma}$ NELLO SPAZIO DELLE FASI AVREMO.

$$\gamma : \begin{cases} q^\alpha_* = \bar{q}^\alpha_*(t) + \lambda \eta^\alpha_*(t) \\ p_\alpha = \bar{p}_\alpha(t) + \lambda \pi_\alpha t \end{cases} \qquad t \in [t_0 + \lambda \delta t_0, t_1 + \lambda \delta t_1]$$

DI ESTREMI $A' = [\bar{q}^\alpha_*(t_0 + \lambda\delta t_0) + \lambda \eta^\alpha_*(t_0 + \lambda \delta t_0), \bar{p}_\alpha(t_0 + \lambda\delta t_0) + \lambda \pi_\alpha(t_0 + \lambda \delta t_0)]$

$$B' \equiv [\bar{q}^\alpha_*(t_1 + \lambda\delta t_1) + \lambda \eta^\alpha_*(t_1 + \lambda\delta t_1), \bar{p}_\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1) + \lambda \pi_\alpha(t_1 + \lambda\delta t_1)]$$

DOVE η_α E π_α SONO FUNZIONI ASSEGNATE IN MODO TALE CHE ANCHE LA CURVA γ (NELLO SPAZIO DELLE FASI) SIA UNA CURVA REGOLARE.

OSSERVIAMO CHE QUESTO FUNZIONALE, È IDENTICO COME VALORE NUMERICO AL FUNZIONALE INTRODOTTO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI, MA AGISCE SU UN ALTRO SPAZIO CHE È LO SPAZIO DELLE FASI.

NOTA:
DAL PRINCIPIO DI HAMILTON. DOVE
$$\begin{cases} q^\alpha_* \to q^\alpha_* + \lambda \eta^\alpha_* \\ \dot{q}^\alpha \to \dot{q}^\alpha_* + \lambda \dot{\eta}^\alpha_* \end{cases} \quad \text{IN } \Sigma_n$$

ABBIAMO VISTO CHE PER VARIAZIONI SINCRONE E AD ESTREMI FISSI

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_*} = 0 \iff (\delta S')_{\bar{\gamma}} = 0$$

ANALOGAMENTE AVREMO: TEOREMA:

PER VARIAZIONI SINCRONE E A ESTREMI FISSI, LE EQUAZIONI DI HAMILTON.

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{cases}$$

SONO EQUIVALENTI A $(\delta S')_{\bar{\gamma}} = 0$

ESSENDO IL FUNZIONALE $S(\gamma)$ DEFINITO NELLO SPAZIO DELLE FASI.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\bar{p}_\alpha \dot{q}^\alpha_* - H(q^\alpha, p_\alpha, t)\right] dt$$

INFATTI SE CALCOLIAMO LA VARIAZIONE PRIMA DEL FUNZIONALE

$$(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{S(\gamma) - S(\bar{\gamma})}{\lambda}$$

OTTERREMO COME ABBIAMO FATTO, CON UNA PROCEDURA ANALOGA, PER IL FUNZIONALE DEFINITO NELLO SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

$$(\delta S)_{\bar\gamma} = \left[\bar p_\alpha \, \delta \bar q^\alpha - H \, \delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\dot q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right]_{\bar\gamma} \pi_\alpha - \left[\dot p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right]_{\bar\gamma} \eta^\alpha \right\} dt$$

DA CUI PER VARIAZIONI SINCRONE $\delta t_0 = \delta t_1$ E AD ESTREMI FISSI $\delta q_\alpha(t_0) = \delta q_\alpha(t_1)$ AVREMO CHE:

SE VALGONO LE EQUAZIONI HAMILTON

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \qquad \Rightarrow \quad (\delta S)_\gamma = 0$$

VICEVERSA SE $\delta S = 0$ AVREMO.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\dot q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right]_{\bar\gamma} \pi_\alpha - \left[\dot p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right]_{\bar\gamma} \eta^\alpha \right\} dt = 0$$

DATA L'ARBITRARIETA' DELLE FUNZIONI π_α ed η_α QUESTA E' VERIFICATA SOLO SE VALGONO LE EQUAZIONI DI HAMILTON.

$$\dot q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad \forall \alpha = 1 \dots N.$$

INFATTI SE PROCEDIAMO PER ASSURDO SUPPONENDO CHE AD UN CERTO ISTANTE AD ESEMPIO $\dot q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} > 0$ PER $t = t^* \in [t_0, t_1]$

ALLORA $\exists \; U = I(t^*) \subseteq [t_0, t_1]$ IN CUI $\dot q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} > 0 \;\; \forall t \in U$

VISTA L'ARBITRARIETA DELLE π_α ed η_α SCEGLIAMO

$$\pi_\alpha = \begin{cases} 0 & t \notin U \\ > 0 & t \in U \end{cases} \qquad \eta_\alpha = 0 \quad \Rightarrow (\delta S)_{\bar\gamma} = \int_U \left[\dot q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right]_{\bar\gamma} \pi_\alpha \, dt > 0$$

ASSURDO

ESERCIZIO:

VEDIAMO COME SI CALCOLA LA VARIAZIONE $(\delta S)_{\bar{\gamma}}$

VALUTIAMO:

$$S(\gamma) - S(\bar{\gamma}) = \int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_1+\lambda\delta t_1} \left\{ (\bar{p}_\alpha + \lambda \pi_\alpha)(\dot{\bar{q}}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha) - H(\bar{q}^\alpha + \lambda \eta^\alpha, \bar{p}_\alpha + \lambda \pi_\alpha, t) \right\} dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[\bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}^\alpha - H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \right] dt$$

CONSIDERIAMO IL 1° INTEGRALE COME

$$\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_1+\lambda\delta t_1} \ldots\ dt = \int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_0} (\ldots)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (\ldots)\,dt + \int_{t_1}^{t_1+\lambda\delta t_1} (\ldots)\,dt$$

VALUTIAMO IL 1° DI QUESTI INTEGRALI UTILIZZANDO IL TEOREMA DELLA MEDIA

$$\int_{t_0+\lambda\delta t_0}^{t_0} (\ldots)\,dt = -\lambda\delta t_0 \underbrace{\left\{ [\bar{p}_\alpha(t^*) + \lambda\pi_\alpha(t^*)][\dot{\bar{q}}^\alpha(t^*) + \lambda\dot{\eta}^\alpha(t^*)] - H[\bar{q}^\alpha(t^*) + \lambda\eta^\alpha(t^*), \bar{p}_\alpha(t^*) + \lambda\pi_\alpha(t^*), t^*] \right\}}_{g(\lambda)} =$$

CON $t_0 + \lambda\delta t_0 \leq t^* \leq t_0$

VALUTIAMO $g(\lambda)\big|_{\lambda=0}$ PERCHÉ CI INTERESSANO TERMINI DI ORDINE λ, CIOÈ

$$= -\lambda\delta t_0 \left\{ \bar{p}_\alpha(t_0)\,\dot{\bar{q}}^\alpha(t_0) - H[\bar{q}^\alpha(t_0), \bar{p}_\alpha(t_0), t_0] \right\} + o(\lambda^2)$$

ANALOGAMENTE AVREMO:

$$\int_{t_1}^{t_1+\lambda\delta t_1} (\ldots)\,dt = \lambda\delta t_1 \left\{ \bar{p}_\alpha(t_1)\,\dot{\bar{q}}^\alpha(t_1) - H[\bar{q}^\alpha(t_1), \bar{p}_\alpha(t_1), t_1] \right\} + o(\lambda^2)$$

DA QUI:

$$S(\gamma) - S(\bar{\gamma}) = \lambda \Big[\delta t \left[\bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}^\alpha - H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \right] \Big]_{t_0}^{t_1} + o(\lambda^2) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \Big[(\bar{p}_\alpha + \lambda \pi_\alpha)(\dot{\bar{q}}^\alpha_* + \lambda \dot{\eta}^\alpha) - H(\bar{q}^\alpha + \lambda \eta^\alpha, \bar{p}_\alpha + \lambda \pi_\alpha, t) \Big] -$$

$$- \Big[\bar{p}_\alpha \dot{\bar{q}}^\alpha_* - H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \Big] \Big\} \, dt \qquad (*)$$

FACCIAMO UNO SVILUPPO DELLA FUNZIONE INTEGRANDA DELL'ULTIMO INTEGRALE, PERCIÒ CHIAMANDO TALE FUNZIONE $G(\lambda)$

$$G(\lambda) = \underbrace{G(0)}_{=0} + \Big\{ \pi_\alpha (\dot{\bar{q}}^\alpha + \lambda \dot{\eta}^\alpha) + (\bar{p}_\alpha + \lambda \pi_\alpha) \dot{\eta}^\alpha_* - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \eta^\alpha_* -$$

$$- \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \pi_\alpha \Big\}_{\lambda = 0} \lambda + o(\lambda^2)$$

DA QUI:

$$G(\lambda) = \Big\{ \pi_\alpha \Big[\dot{\bar{q}}^\alpha_* - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Big]_{\bar{\gamma}} + \bar{p}_\alpha \dot{\eta}^\alpha_* - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\Big|_{\bar{\gamma}} \eta^\alpha \Big\} \lambda + o(\lambda^2)$$

$$= \Big\{ \pi_\alpha \Big[\dot{\bar{q}}^\alpha_* - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Big]_{\bar{\gamma}} + \frac{d}{dt}\left(\bar{p}_\alpha \eta^\alpha_* \right) - \Big[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Big]_{\bar{\gamma}} \eta^\alpha_* \Big\} \lambda + o(\lambda^2)$$

DA QUI INSERENDO QUESTA RELAZIONE NELLA (*) AVREMO:

$$S(\gamma) - S(\bar{\gamma}) = \lambda \Big\{ \Big[\delta t \left[\bar{p}_\alpha \dot{q}^\alpha_* - H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \right] + \bar{p}_\alpha \eta^\alpha_* \Big]_{t_0}^{t_1} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big(\pi_\alpha \Big[\dot{\bar{q}}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Big]_{\bar{\gamma}} - \Big[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \Big]_{\bar{\gamma}} \eta^\alpha_* \Big) dt \Big\} + o(\lambda^2)$$

Da cui:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{S(\gamma) - S(\bar{\gamma})}{\lambda} = \Big[\bar{p}_\alpha \big(\overbrace{\dot{\bar{q}}^\alpha \delta t + \eta^\alpha}^{\delta \bar{q}^\alpha} \big) - \delta t\, H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \Big]_{t_0}^{t_1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \pi_\alpha \Big[\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Big]_\gamma - \eta^\alpha \Big[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \Big] \Big\}_{\bar{\gamma}} dt$$

Cioè

$$\boxed{(\delta S)_{\bar{\gamma}} = \Big[\bar{p}_\alpha\, \delta \bar{q}^\alpha - \delta t\, H(\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha, t) \Big]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \pi_\alpha \Big[\dot{q}^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \Big] - \eta^\alpha \Big[\dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \Big] \Big\}_{\bar{\gamma}} dt}$$