CAPITOLO III .

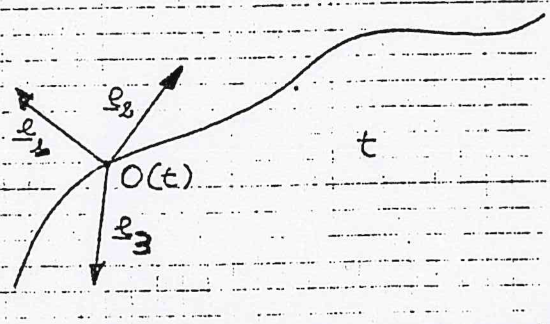
CINEMATICA DEL PUNTO.

I. ASSIOMI DELLA CINEMATICA CLASSICA.

I. TEMPO PROPRIO DI UN OSSERVATORE.

Consideriamo lo spazio puntuale affine euclideo $\mathcal{E}_3$, in questo spazi prendiamo un certo punto O che descriva nel tempo una certa traiettoria O(t), al variare di O sulla traiettoria consideriamo corrispondentemente una terna di versori $\underline{e}_i(t) \in E_3$, per ultimo prendiamo in esame il parametro t detto tempo.

Assegnare un punto $O \in \mathcal{E}_3$, una base $\underline{e}_i \in E_3$ ed un tempo t , significa individuare un "osservatore".



Il tempo, per gli scopi della cinematica, altro non è se non una variabile reale ordinata (esiste un ordinamento che, in effetti, ci permette d distinguere da ciò che si definisce "prima" e ciò che si definisce "dopo" in un certo evento).

Per misurare il tempo basterà, per esempio, considerare un certo fenom no periodico, la cui durata si assume come unità di misura, e su questo c struire dei multipli e sottomultipli che individuino volta per volta la v riabile ordinata tempo.

Come fenomeno periodico campione potremmo considerare, per esempio, la rotazione della Terra messa in evidenza dall'osservazione che una certa stella lontana rioccupa la stessa posizione dopo una certa durata. Naturalmente questa scelta è puramente convenzionale, giacché nessuno ci assicura che detto fenomeno sia effettivamente periodico.

Similmente possiamo convenire di usare come tempo quello connesso con le oscillazioni atomiche ("tempo atomico"). Ed anche qui la scelta è puramente convenzionale: stiamo ipotizzando che le oscillazioni atomiche siano periodiche.

Di fatto, però, queste due definizioni di tempo, nei limiti delle approssimazioni, coincidono. La considerazione più importante da trarre da tutto questo discorso è che nella definizione del concetto di tempo subentra una buona dose di convenzionalità. Potremmo partire, per esempio, da una concezione di tempo del tutto diversa da quella legata al moto periodico (per ipotesi) della rotazione della Terra, o all'oscillazione periodica (per ipotesi) dell'atomo. Potremmo, per esempio, convenire di assumere come unità di misura del tempo quella dedotta dal moto di un corpo che scivola accelerando lungo un piano inclinato per poi risalire su tirato da una molla, (questo moto, in generale, non sarà affatto periodico tenendo conto degli effetti dissipativi dell'attrito). Se usassimo, tuttavia, questa come definizione di tempo, probabilmente le leggi della meccanica che determineremo di conseguenza sarebbero molto più complicate di quelle tuttora conosciute.

2. COLLEGAMENTI TRA DUE OSSERVATORI.

Uno dei problemi che dobbiamo affrontare consiste nel cercare le relazi ni che sussistono nelle descrizioni di un certo moto da parte di due diffe renti osservatori. La prima cosa che supponiamo è che l'ambiente sia lo stesso per i due osservatori, precisamente lo spazio puntuale affine $\mathcal{E}_3$.

Se noi, dunque, vediamo passare dinnanzi ad un traguardo un certo punto P , un altro osservatore vedrà passare il punto P per lo stesso traguard (questo perché il fenomeno avviene in uno spazio ambiente che è comune ai due osservatori), ma se noi attribuiamo a questo passaggio un certo tempo t , non è detto che il secondo osservatore attribuisca allo stesso fenomen le stesso tempo.

L'ipotesi che viene fatta nell'ambito della meccanica classica è che i tempi siano gli stessi per tutti gli osservatori, a meno di una arbitraria scelta nell'origine dell'asse dei tempi, a meno, cioè, di una trasformazio ne lineare del tipo:

$$\boxed{t' = \alpha t + \beta} \xrightarrow{\text{TRASF. LINEARE AFFINE}} \boxed{t' = t + t_0} .$$

Ciò significa che esiste un "tempo assoluto" uguale per tutti gli osse vatori, a meno di una scelta dell'origine ed eventualmente a meno di una diversa scelta dell'unità di misura (in questo caso avremo $t = \lambda t' + t_0$)

2. GENERALITA' SUL MOTO DI UN PUNTO.

3. EQUAZIONI FINITE DEL MOTO DI UN PUNTO.

Avendo definito il concetto di osservatore possiamo passare a quella c è la descrizione del moto del punto materiale. Diciamo subito che per punto materiale si intende un qualsiasi corpo che abbia dimensioni trascurabili rispetto al moto che si intende studiare. Se per esempio consideriamo il moto della Terra intorno al Sole, rispetto alla distanza Terra-Sole, in prima approssimazione, possiamo riguardare la Terra come un punto materiale.

Nell'ambito dello studio della cinematica classica del punto, ci limiteremo all'analisi di fenomeni in cui le distanze in gioco sono sempre talmente elevate da poter trascurare le dimensioni del corpo e considerarlo come un punto materiale.

Rispetto ad un certo osservatore, il punto P avrà un certo moto che viene individuato da una funzione vettoriale del tempo la quale, essendo il tempo assoluto, dipende sempre da una stessa variabile, qualunque sia l'osservatore. In questo senso il moto descritto potrà chiamarsi moto assoluto.

Rispetto all'osservatore scelto possiamo rappresentare il moto di P, mediante la seguente:

$$(I) \qquad P(t) - O = x^i(t)\, \underline{e}_i \, ,$$

e questo nel caso in cui supponiamo che il riferimento $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ sia fisso (in generale sia O che $\underline{e}_i$ dipenderanno dal tempo).

Prima di proseguire è bene precisare che sulla funzione $P(t)$ è necessario imporre certe condizioni affinché essa sia matematicamente trattabile.

Sappiamo, infatti, che il moto di un punto P avviene in modo tutt'altro che continuo: esso è sottoposto a numerosissime fluttuazioni. Tuttavia nell'ambito della fisica macroscopica si suppone, in prima approssimazione, che il moto del punto P sia continuo, ed anzi, per motivi di carattere tecnico, supporremo che la funzione $P(t)$ non solo sia continua ma sia anche dotata di derivate prima e seconda continue. Altrimenti detto: nell'intervallo di tempo $I = [a, b]$ in cui il moto avviene, supporremo che la funzione $P(t)$ sia di classe C^2 : $P(t) \in C^2(I)$.

Questa ipotesi cade nel caso in cui si desidera studiare l'urto tra due corpi macroscopici considerati come punti materiali: in questo caso dovrem mo negare l'ipotesi di continuità e regolarità del moto.

In chiusura di paragrafo diciamo che la (I) chiamasi equazione finita del moto, e le $x^i = x^i(t)$ diconsi equazioni cartesiane finite del moto.

4. VELOCITA' DI UN PUNTO MATERIALE.

Definizione. Diciamo velocità del punto P la seguente:

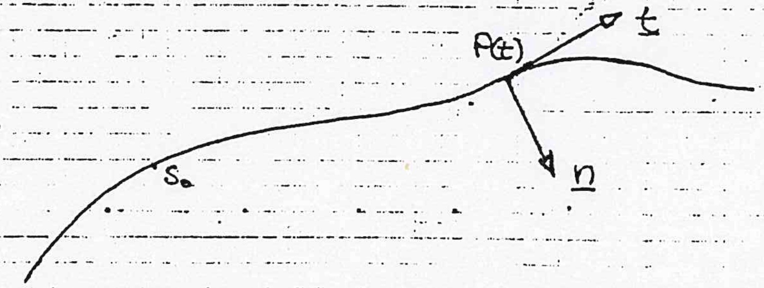
$$\underline{v}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{P}(t) \quad .$$

Sappiamo che il punto P descriverà una traiettoria che sarà una certa curva regolare in $\mathcal{E}_3$, inoltre abbiamo avuto modo di vedere che il vettor tangente $\boxed{\underline{t}}$ è dato da:

$$\underline{t} = \frac{dP}{ds} \quad ,$$

dove s è l'ascissa curvilinea avendo scelto l'orientamento sulla curva a partire da un certo s_0. A questo punto osserviamo che:

$$\underline{v}(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\underline{t}$$



Quindi il vettore velocità coincide in direzione (punto per punto) al v tore $\underline{t}$ (e quindi sempre tangente alla curva di percorrenza). La velocità $\underline{v}$ è un vettore equiverso od antiverso al vettore $\underline{t}$ a seconda che $\dot{s}$ sia maggiore o minore di zero.

Rispetto ad un osservatore fisso, giacché $P(t) = O + x^i(t)\,\underline{e}_i$, si avrà che:

$$\underline{v}(t) = \dot{P}(t) = \frac{d\,x^i}{d\,t}\,\underline{e}_i \quad ,$$

quindi rispetto ad un osservatore fisso che usa una base $\underline{e}_i$ fissa, le componenti della velocità $\underline{v}$ non sono altro se non le derivate prime rispetto al tempo delle coordinate del punto $P(t)$.

5. ACCELERAZIONE DI UN PUNTO MATERIALE.

Definizione. Chiamiamo accelerazione del punto materiale P la funzione del tempo:

$$\underline{a}(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2 P}{d\,t^2} \quad .$$

Rispetto ad un osservatore fisso si ha:

$$\underline{a}(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2 x^i}{d\,t^2}\,\underline{e}_i \quad ,$$

cioè, in un riferimento in cui la base non varia nel tempo, le componenti del vettore accelerazione sono date dalle derivate seconde delle coordinate di P rispetto al tempo.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che $\underline{v}(t) = \dot{s}\,\underline{t}$, per cui avremo:

$$\underline{a}(t) = \ddot{P}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,\frac{d\,\underline{t}}{d\,t} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,\frac{d\,\underline{t}}{d\,s}\,\frac{d\,s}{d\,t} =$$

$$= \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2 \frac{d\,\underline{t}}{d\,s}\,,$$

ma per la prima formula di Frenet si ha che:

$$\boxed{\frac{d\,\underline{t}}{d\,s} = \frac{I}{R}\,\underline{n}}\,,$$

essendo $\underline{n}$ la normale interna. Per cui:

$$\boxed{\underline{a}(t) = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\underline{n}}\,.$$

La conclusione è che, mentre la velocità è sempre parallela al vettor tangente $\underline{t}$, l'accelerazione ha, in generale, una componente tangenziale ed una normale, ed è in ogni caso diretta verso la concavità della traiettoria, questo perché la componente lungo la normale interna è positiva.

Essendo, infine, l'accelerazione combinazione lineare dei vettori $\underline{t}$ $\underline{n}$ essa appartiene, come vettore, al piano osculatore (non ha componenti lungo la binormale).

Vi sono dei casi particolari di moto in cui si ha solo l'accelerazione tangenziale o solo l'accelerazione normale. Esaminiamoli.

I) Per avere solo accelerazione normale deve accadere che $\ddot{s} = o$, ovvero $\dot{s}$ = costante, cioè il punto deve muoversi di moto uniforme sulla curva fissata (bisogna che percorra ascisse curvilinee uguali in tempi uguali).

Un esempio è dato dal moto circolare uniforme in cui il punto material P percorre archi di cerchio uguali in tempi uguali.

2) Abbiamo, invece, solo l'accelerazione tangenziale quando:

$$\frac{\dot{s}^2}{R} = o \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \dot{s} = o \\ \searrow \ \dfrac{I}{R} = o \end{array}\,,$$

ma se è $\boxed{\dot{s} = o}$ il moto non sussiste $\boxed{(P \text{ è fermo})}$; deve essere, dunque, $\boxed{\frac{I}{R} = o}$, ovvero la curvatura deve essere nulla. La conclusione è che si può avere solo accelerazione tangenziale allora e solo allora in cui il m

TESTO RETTILINEO

NEL CASO DI MOTO RETTILINEO POSSIAMO CONSIDERARE

1) MOTO RETTILINEO UNIFORME

DOVE $\underline{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{d\underline{z}(t)}{dt} = $ COSTANTE

QUINDI INTEGRANDO $\Rightarrow \int_0^t \underline{v}\, dt = \int_{\underline{z}_0}^{\underline{z}} d\underline{z} \Rightarrow \underline{z} - \underline{z}_0 = \underline{v}\, t$

DA CUI AVREMO:

$$\begin{cases} \underline{z} = \underline{z}_0 + \underline{v}\, t \\ \underline{v} = \text{cost.} \\ \underline{a} = 0 \end{cases}$$

2) MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = $ COSTANTE $\Rightarrow$ (INTEGRANDO) $\int_0^t \underline{a}\, dt = \int_{v_0}^{v} d\underline{v} \Rightarrow \underline{v} - \underline{v}_0 = \underline{a}\, t$

INTEGRANDO ANCORA $\underline{v} = \frac{d\underline{z}}{dt}$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} d\underline{z} = \int_0^t \underline{v}\, dt = \int_0^t \underline{v}_0\, dt + \int_0^t \underline{a}\, t\, dt$$

DA CUI $\underline{z} - \underline{z}_0 = \underline{v}_0\, t + \frac{1}{2}\underline{a}\, t^2$

QUINDI LE LEGGI ORARIE:

$$\begin{cases} \underline{z} = \underline{z}_0 + \underline{v}_0\, t + \frac{1}{2}\underline{a}\, t^2 \\ \underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{a}\, t \\ \underline{a} = \text{COSTANTE} \end{cases}$$

RICORDIAMO LE FORMULE DI FRENET:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{t}}{ds} = \dfrac{1}{R(s)}\underline{n} \\ \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n} \\ \dfrac{d\underline{n}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\underline{t} - \tau\,\underline{b} \end{cases}$$

INOLTRE:

$$\begin{cases} \underline{v} = \dot{s}\,\underline{t} \\ \underline{a} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\underline{n} \end{cases}$$

SIA ASSEGNATO IL MOTO DESCRITTO DA $P = P(t)$

PROVARE LE PROPRIETA':

1) IL MOTO E' RETTILINEO SE E SOLO SE $\boxed{\underline{v} \wedge \underline{a} = 0}$ $\forall t$

2) IL MOTO E' PIANO SE E SOLO SE POSTO $P(t_0) = P_0$

$$\boxed{(P - P_0)\cdot(\underline{v} \wedge \underline{a}) = 0} \quad \forall t$$

DIMOSTRAZIONE

1) $\underline{v} \wedge \underline{a} = \dot{s}\,\underline{t} \wedge \left[\ddot{s}\,\underline{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\underline{n}\right] = \dfrac{\dot{s}^3}{R_c}\,\underline{t} \wedge \underline{n} = \dfrac{\dot{s}^3}{R_c}\,\underline{b}$

QUINDI SE: Hp $\underline{v} \wedge \underline{a} = 0 \Rightarrow \dfrac{\dot{s}^3}{R_c}\underline{b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = 0 \\ \dfrac{1}{R_c} = 0 \end{cases}$ MOTO RETTILINEO

VICEVERSA SE IL MOTO E' RETTILINEO $\begin{cases} \dot{s} = 0 \\ \dfrac{1}{R_c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v} \wedge \underline{a} = 0$

2) $\boxed{\text{COND. NECESSARIA}}$: Hp MOTO E' PIANO TS: $(P - P_0)\cdot(\underline{v} \wedge \underline{a}) = 0$

SE IL MOTO E' PIANO $(P - P_0)$, $\underline{v}$, $\underline{a}$ SONO COMPLANARI DA CUI

LA TESI $(P - P_0)\cdot(\underline{v} \wedge \underline{a}) = 0$

$\boxed{\text{COND. SUFFICIENTE}}$: Hp: $(P - P_0)\cdot(\underline{v} \wedge \underline{a}) = 0$ TS IL MOTO E' PIANO

$(P - P_0)\cdot(\underline{v} \wedge \underline{a}) = (P - P_0)\cdot\left[\dot{s}\,\underline{t} \wedge \left(\ddot{s}\,\underline{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\underline{n}\right)\right] = \dfrac{\dot{s}^3}{R_c}\left[(P - P_0)\cdot(\underline{t} \wedge \right.$

$= \dfrac{\dot{s}^3}{R_c}(P - P_0)\cdot\underline{b} = 0$ (*) DA CUI AVREMO I DUE POSSIBILI CASI

a) $\dfrac{\dot{s}^3}{R_c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = 0 \\ \dfrac{1}{R_c} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ MOTO RETTILINEO $\Rightarrow$ QUINDI PIANO

b) $\dfrac{\dot{s}^3}{R_c} \neq 0 \Rightarrow (P - P_0)\cdot\underline{b} = 0$ (**)

DERIVANDO LA (**)

$$\frac{dP}{ds}\cdot \underline{b} + (P-P_0)\cdot\frac{d\underline{b}}{ds} = \cancel{\underline{t}\cdot\underline{b}} + \tau(s)(P-P_0)\cdot\underline{n} = 0$$

DA CUI c) $\tau = 0$ TORSIONE NULLA $\Rightarrow$ MOTO PIANO. (TESI)

PROCEDIAMO PER ASSURDO ASSUMENDO CHE

d) $\tau \neq 0 \Rightarrow (P-P_0)\cdot\underline{n} = 0$ (ASSURDO)

INFATTI SE PER ASSURDO $(P-P_0)\cdot\underline{n} = 0$ DERIVANDO AVREMO

$$\frac{dP}{ds}\cdot\underline{n} + (P-P_0)\cdot\frac{d\underline{n}}{ds} = \cancel{\underline{t}\cdot\underline{n}} + (P-P_0)\cdot\left[-\frac{1}{R}\underline{t} - \tau\underline{b}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tau\,(P-P_0)\cdot\underline{b}}_{=0 \text{ PER LA } (*)} + \frac{1}{R}(P-P_0)\cdot\underline{t} = 0 \Rightarrow (P-P_0)\cdot\underline{t} = 0$$

DA CUI DERIVANDO

$$\underbrace{\frac{dP}{ds}\cdot\underline{t}}_{\underline{t}\cdot\underline{t}=1} + \underbrace{(P-P_0)\cdot\frac{d\underline{t}}{ds}}_{\frac{1}{R}(P-P_0)\cdot\underline{n}=0} = 0 \Rightarrow \boxed{1=0}$$

ASSURDO

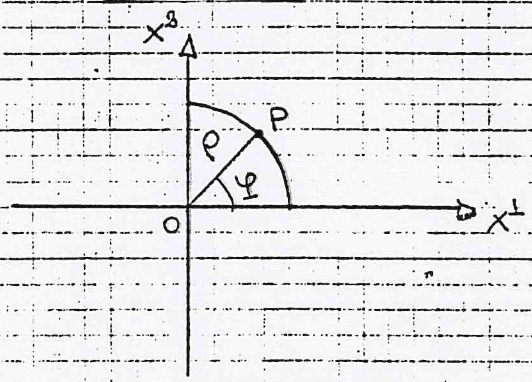
to sia rettilineo.

3. MOTI PIANI.

6. MOTO IN COORDINATE POLARI. VELOCITA' ANGOLARE E VELOCITA' AREALE.

Una classe particolare di moti è rappresentata dai moti piani (che avvengono, cioè, su di un piano). Nello studio di tali moti può essere opportuno descrivere il moto stesso in termini di coordinate polari, ricordando che:

$$\begin{cases} x^1 = \rho \cos \varphi \\ x^2 = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$



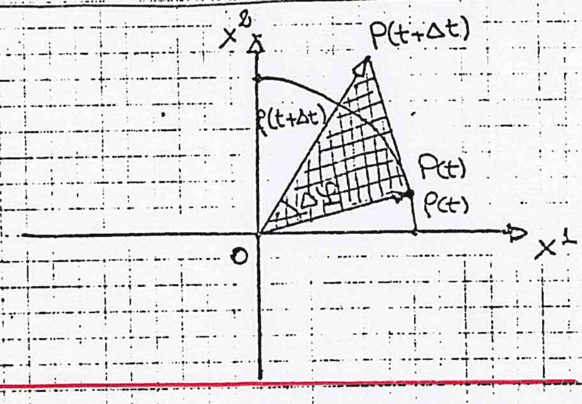
Le coordinate polari non coprono l'intero piano; viene esclusa l'origine. Ciò significa che, se si vuole studiare un moto di un punto che passa per l'origine, occorre tornare a riferirsi alle coordinate cartesiane.

Il moto descritto a mezzo delle coordinate polari rappresenta un esempio di moto che viene descritto rispetto ad una base non fissa nel tempo.

Definiamo velocità angolare del punto P la derivata rispetto al tempo dell'anomalia φ :

$$\boxed{\text{velocità angolare} = \dot{\varphi} = \frac{d\,\varphi}{d\,t}}\;.$$

Definiamo velocità areale del punto il limite, per Δt tendente a zero, del rapporto tra l'area spazzata nell'intervallo di tempo Δt e l'intervallo stesso:



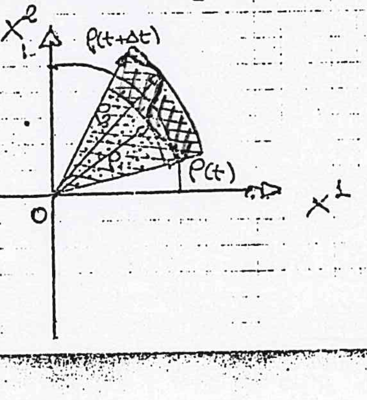
$$\boxed{\text{velocità areale} = \dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}}\;.$$

Dimostriamo che questo limite matematicamente esiste, sotto le ipotesi di regolarità del moto. Essendo il moto regolare, la funzione $\boxed{\rho(t)}$ è continua e derivabile nell'intervallo di tempo che va da t a $t+\Delta t$.

Detta funzione, per il teorema di Weierstrass, è dotata di massimo e minimo nell'intervallo $[t,\, t+\Delta t]$:

$$\boxed{\rho_I \leq \rho(t) \leq \rho_2}\;.$$

Ma allora l'area spazzata dal punto P nell'intervallo di tempo considerato è certamente compresa tra l'area del settore circolare di raggio ρ_I e l'area del settore circolare di raggio ρ_2 :



NOTA: AREA SETTORE CIRCOLARE DI RAGGIO ρ_1 $\iint dx\,dy = \iint \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\rho_1} \rho\, d\rho \int_0^{\Delta\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\rho_1^2 \Delta\varphi$

AREA SETTORE CIRCOLARE DI RAGGIO ρ_2 $\Rightarrow$ $\iint dx\,dy = \iint \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\rho_2} \rho\, d\rho \int_0^{\Delta\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\rho_2^2 \Delta\varphi$

$$\frac{1}{2}\rho_1^2|\Delta\varphi| < |\Delta A| < \frac{1}{2}\rho_2^2|\Delta\varphi| \quad ,$$

essendo ΔA l'area effettivamente spazzata dal raggio vettore nel tempo che va da t a $t+\Delta t$. Dividendo per Δt, si avrà:

$$\frac{1}{2}\rho_1^2\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| < \left|\frac{\Delta A}{\Delta t}\right| < \frac{1}{2}\rho_2^2\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| \quad ,$$

e passando al limite per Δt tendente a zero, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\rho^2\,\dot{\varphi} \leq \dot{A} \leq \frac{1}{2}\rho^2\,\dot{\varphi} \quad ,$$

donde segue che esiste il limite di cui sopra e vale $\boxed{\frac{1}{2}\rho^2\,\dot{\varphi} = \dot{A}}$

7. MOTO CIRCOLARE.

Il moto circolare è il moto di un punto che avviene su di una circonferenza. In coordinate polari, essendo in questo caso $\rho = R$ costante, indicando con φ l'anomalia (e avendo scelto come verso positivo delle rotazioni quello antiorario), le equazioni finite del moto saranno:

$$\begin{cases} x^1(t) = R\cos\varphi(t) \\ x^2(t) = R\,\mathrm{sen}\,\varphi(t) \end{cases} \quad .$$

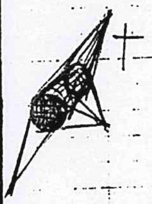
Per la velocità angolare avremo:

$$\boxed{\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}} \quad ,$$

mentre per la velocità areale avremo:

$$\boxed{\dot{A} = \frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}} \quad .$$

Quindi velocità angolare e velocità areale sono proporzionali.



Misurando φ in radianti, possiamo scrivere $\boxed{\varphi = \frac{s}{R}}$ ed $s = R\varphi$, e pertanto:

$$\boxed{\dot{s} = R\omega} \quad .$$

Inoltre per quanto detto nel paragrafo 4, si ha che $\underline{v} = \dot{s}\,\underline{t}$ e quindi:

$$\underline{v} = R\omega\,\underline{t} \quad ,$$

analogamente abbiamo visto che $\underline{a} = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\underline{n}$ e quindi:

$$\boxed{\underline{a} = R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + R\omega^2\,\underline{n}} \quad .$$

Se il moto è circolare uniforme allora $\dot{s}$ = costante, ovvero $\boxed{\ddot{s} = 0}$, e pertanto avremo:

$$\boxed{\underline{a} = R\omega^2\,\underline{n}} \quad ,$$

cioè l'accelerazione avrà soltanto la componente normale.

Il moto circolare ed uniforme ci mostra un esempio di composizione di moti armonici. In generale, infatti, per un qualunque moto circolare, possiamo scrivere che:

$$\boxed{O - P = R\,\underline{n}} \quad ,$$

ed essendo $\underline{a} = R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + R\omega^2\,\underline{n}$,si avrà:

$$\boxed{\underline{a} = R\ddot{\varphi}\,\underline{t} + \omega^2 (O - P)} \quad ,$$

e se consideriamo il caso in cui il moto sia circolare ed uniforme dove $\boxed{\ddot{\varphi} = 0}$ avremo che:

$$\boxed{\underline{a} = \omega^2 (O - P)} \quad ;$$

consideriamo le componenti sugli assi x^1 ed x^2 dell'accelerazione:

$$\begin{cases} \ddot{x}_I = \omega^2 (-x_I) \\ \ddot{x}_2 = \omega^2 (-x_2) \end{cases} ,$$

da cui:

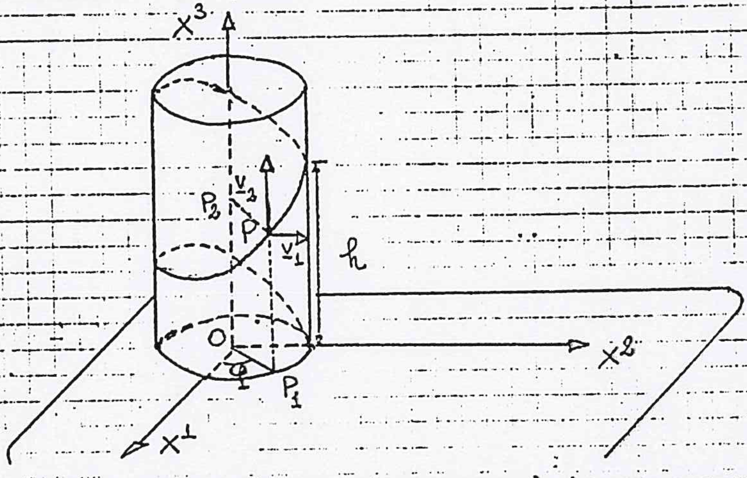
$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x}_I + \omega^2 x_I = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0 \end{cases}} .$$

Le equazioni finite mostrano che i punti P_I e P_2 (proiezioni sugli assi del punto P) si muovono di moto armonico con pulsazione ω.

4. ESEMPIO DI MOTO NELLO SPAZIO.

8. MOTO ELICOIDALE.

Supponiamo di considerare un punto materiale P che si muove di moto elicoidale su un'elica cilindrica di passo h :



Il punto P avrà una certa velocità che si scomporrà in un componente $\underline{v}_2$ diretto lungo l'asse x^3, ed in un componente $\underline{v}_I$ sul piano x^I-x^2 :

$$\boxed{\underline{v} = \underline{v}_I + \underline{v}_2} ,$$

essendo ovviamente:

$$\underline{v}_I \cdot \underline{v}_2 = 0$$

Cerchiamo di determinare le equazioni finite del moto. A questo scopo consideriamo il moto del punto P_I, proiezione di P sul piano $x^I - x^2$, e del punto P_2, proiezione di P sull'asse x^3. Avremo:

$$\begin{cases} x^I = R\cos\varphi(t) \\ x^2 = R\,\mathrm{sen}\,\varphi(t) \\ x^3 = x^3(t) \end{cases},$$

essendo x^I ed x^2 le coordinate di P_I, ed x^3 è la coordinata di P

Il moto elicoidale è dunque la composizione di un moto circolare e di un moto rettilineo:

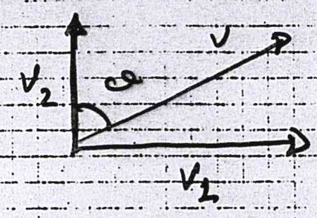
$$(I) \qquad (P-O) = (P_I - O) + (P_2 - O) \qquad \forall t \quad .$$

Se, infatti, indichiamo con α ed a rispettivamente un piano ed una retta ortogonali di $\mathcal{E}_3$ e con O la loro intersezione, e consideriamo i punti P_I e P_2 rispettivamente in moto circolare su α ed in moto rettilineo su a, possiamo, sotto queste condizioni, studiare il moto composto cioè il moto del punto P tale che sia rispettata la condizione (I).

Indicato con $\{O, \underline{e}_i\}$, un riferimento ortonormale levogiro con l'origine nel punto O ed il piano $x^3 = 0$ coincidente con α, e dette $(x^I, x^2,$ le coordinate cartesiane di P, se (ρ, φ) sono le coordinate polari di P_I (nel sistema di coordinate polari di α avente O come polo, il semiasse positivo delle x^I come asse polare, e verso delle anomalie crescenti tale da attribuire l'anomalia $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a tutti i punti del semiasse positivo delle x^2), allora (ρ, φ, z) sono le coordinate cilindriche del punto

Avremo pertanto proprio le seguenti equazioni finite del moto già determinate:

$$\boxed{\begin{cases} x^I = R\cos\varphi(t) \\ x^2 = R\,\mathrm{sen}\,\varphi(t) \\ x^3 = x^3(t) \end{cases}}$$



Proprietà. Il moto di P è elicoidale se e solo se il rapporto tra $\dot{\varphi}$ e $\dot{z}$ è costante nel tempo.

Infatti si ha:

$$\underline{v} = \underline{v}_I + \underline{v}_2 \qquad (2)$$

con $\underline{v}_I // \alpha$ e $\underline{v}_2 // \underline{k}$. Pertanto, detto θ l'angolo che $\underline{v}$ forma con l'asse x^3, si ha:

$$\boxed{\operatorname{tang}\theta = \frac{v_I}{v_2} = \frac{R\dot{\varphi}}{\dot{x}^3}} \Rightarrow \boxed{\dot{z} = h\dot{\varphi}} \qquad (3)$$

onde, se e solo se il rapporto tra $\dot{\varphi}$ e $\dot{x}^3$ è costante nel tempo, la traiettoria descritta da P sulla superficie cilindrica taglia le generatrici sotto angolo costante, cioè è un elica di questa.

Proprietà. Il moto di P è elicoidale uniforme se e solo se ciascuno dei moti componenti è uniforme.

Infatti, il moto è elicoidale se e solo se:

$$\boxed{\dot{x}^3 = h\,\dot{\varphi}} \qquad (4)$$

con h costante nel tempo. Essendo poi $\underline{v}_I \cdot \underline{v}_2 = 0$, la (2) e la (4) implicano:

$$|v| = \sqrt{v_I^2 + v_2^2} = \sqrt{R^2\dot{\varphi}^2 + (\dot{x}^3)^2} = |\dot{\varphi}|\sqrt{R^2 + h^2} \quad ,$$

cioè il moto di P è elicoidale uniforme se, oltre alla (4), è $\dot{\varphi} = \text{cost.}$

Ma per la (4) la costanza di $\dot{\varphi}$ implica quella di $\dot{x}^3$, onde la proprietà è dimostrata.

"QUINDI IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE SI DICE ELICOIDALE SE LA TRAIETTORIA DESCRITTA DA P SULLA SUPERFICIE DEL CILINDRO TAGLIA LE GENERATRICI SOTTO UN ANGOLO COSTANTE"

DA CUI $\Rightarrow \boxed{\dot{z} = h\dot{\varphi}}$

APPLICAZIONI SUL RAGGIO DI CURVATURA E TORSIONE

FORMULE DI FRENET

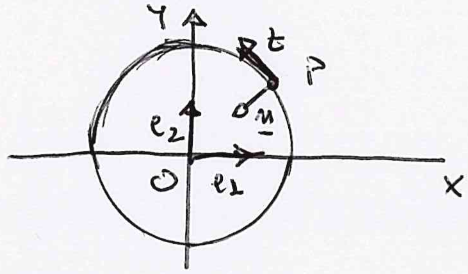
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{t}}{ds} = c(s)\,\underline{n} = \dfrac{1}{R_c(s)}\,\underline{n} \\[2ex] \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n} \\[2ex] \dfrac{d\underline{n}}{ds} = -\,c(s)\,\underline{t} - \tau(s)\,\underline{b} \end{cases}$$

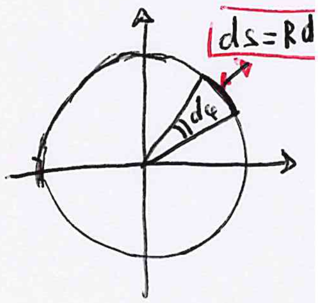
CINEMATICA DEL PUNTO

$$\begin{cases} \underline{v} = \dfrac{dP}{dt} = \dot{s}\,\underline{t} \\[2ex] a = \dfrac{d^2P}{dt^2} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\,\underline{n} \end{cases}$$

MOTO CIRCOLARE

$$(1)\quad \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$





$$\boxed{(ds)}^* = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\cancel{(dR)^2} + R^2(d\varphi)^2} = \boxed{R\,d\varphi} \Rightarrow$$

DA CUI $\quad s = \displaystyle\int_0^s d\xi = R\int_0^{\varphi} d\bar{\varphi} = R\varphi \quad \Rightarrow \boxed{\varphi = \dfrac{s}{R}}$

ALLORA (1) È LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DEFINITA

$$\boxed{\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2}$$

(PARAMETRO φ) $\quad \boxed{P = P(\varphi)}$

SE SOSTITUIAMO $\boxed{\varphi = \dfrac{s}{R}}$ (CAMBIAMO PARAMETRO)

OTTENIAMO

$$(2)\quad \begin{cases} x = R\cos\left(\dfrac{s}{R}\right) \\[2ex] y = R\sin\left(\dfrac{s}{R}\right) \end{cases}$$

LA (2) È LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA IN TERMINI DI s

$$\boxed{\tilde{\gamma} : [0, 2\pi R] \to \mathbb{R}^2 \qquad (P = P(s))}$$

COSÌ AVREMO

$$P - O = R\cos\left(\frac{s}{R}\right) \underline{e}_1 + R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right) \underline{e}_2$$

CI CHIEDIAMO ADESSO SIANO UGUALI $\left\{ \begin{array}{l} \text{CURVATURA} \\ \text{TORSIONE} \end{array} \right.$ → DELLA TRAIETTORIA

SENZA FARE CALCOLI CI ASPETTIAMO:

$$\begin{cases} R_c = R & \text{(R RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA)} \\ \tau = 0 & \text{(CURVA E' PIANA)} \end{cases} \Rightarrow \text{"BANALE"}$$

VEDIAMO LA PROCEDURA PER OTTENERE QUESTO "BANALE" RISULTATO

DETERMINIAMO I VERSORI $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$

$$\begin{cases} \underline{t}(s) = \dfrac{dP}{ds} = -\mathrm{sen}\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_1 + \cos\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_2 \\ \underline{n} = -\cos\varphi\, \underline{e}_1 - \mathrm{sen}\varphi\, \underline{e}_2 = -\cos\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_1 - \mathrm{sen}\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_2 \\ \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right) & \cos\left(\frac{s}{R}\right) & 0 \\ -\cos\left(\frac{s}{R}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right) & 0 \end{vmatrix} = \underline{e}_3 \end{cases}$$

← (VETTORE COSTANTE)

NOTI I VERSORI $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ UTILIZZIAMO LE FORMULE DI FRENET

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{t}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\cos\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_1 - \dfrac{1}{R}\mathrm{sen}\left(\dfrac{s}{R}\right) \underline{e}_2 = \dfrac{1}{R}\underline{n} \\ \dfrac{d\underline{t}}{ds} = \dfrac{1}{R_c}\underline{n} \end{cases}$$

DA CUI BANALMENTE $\boxed{R_c = R}$

CONFRONTANDO I DUE RISULTATI

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{b}}{ds} = 0 \\ \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau(s) = 0}$$

INFINE E' BANALE VERIFICARE CHE LA 3ª FORMULA DI FRENET

$$\frac{d\underline{n}}{ds} = -c(s)\,\underline{t} - \tau(s)\,\underline{b} = -\frac{1}{R}\underline{t}$$

INFATTI, DERIVANDO

$$\frac{d\underline{n}}{ds} = \frac{1}{R}\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right) \underline{e}_1 - \frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right) \underline{e}_2 = -\frac{1}{R}\underline{t}$$

"MOTO ELICOIDALE"

COORDINATE CILINDRICHE:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi(t) \\ y = R\sin\varphi(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

IL MOTO E' ELICOIDALE SSE SOLO SE: $\boxed{\dot{z} = k\dot{\varphi}}$

DA cui $dz = k\,d\varphi$

$$\int_0^z d\tilde{z} = z = k\int_0^{\varphi} d\hat{\varphi} = k\varphi$$

cioè $\boxed{z = k\varphi}$

ASCISSA CURVILINEA

$$ds = \sqrt{\cancel{(dR)^2} + R^2(d\varphi)^2 + (dz)^2} = \sqrt{R^2(d\varphi)^2 + (dz)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2(d\varphi)^2 + (k\,d\varphi)^2} = \sqrt{k^2 + R^2}\,d\varphi$$

PONIAMO: $\alpha = \sqrt{R^2 + k^2}$ $\boxed{ds = \alpha\,d\varphi}$ $\Rightarrow s = \int_0^s d\hat{s} = \alpha\int_0^{\varphi} d\hat{\varphi} = \alpha\varphi$

QUINDI POSSIAMO PORRE $\boxed{s = \alpha\varphi}$

QUINDI QUANDO $\varphi = 2\pi \rightarrow s = 2\pi\alpha$

ALLORA AVREMO

$$\begin{cases} x = R\cos(\varphi) \\ y = R\sin(\varphi) \\ z = k\varphi \end{cases}$$

E' LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA IN TERMINI DI φ

$$\begin{cases} \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow R^3 \\ P = P(\varphi) \end{cases}$$

SE PERO' PONIAMO $\varphi = \dfrac{s}{\alpha}$ PASSIAMO ALLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA IN TERMINI DI s

$$\bar{s} = \alpha\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\alpha$$

$\boxed{\tilde{\gamma} : [0, 2\pi\alpha] \rightarrow R^3 \quad \text{cioè} \quad P = P(s)}$

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \\ y = R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \\ z = \frac{h}{\alpha}s \end{cases} \Rightarrow P-O = \left[R\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]\underline{e}_1 + \left[R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right]\underline{e}_2 + \left[\frac{h}{\alpha}s\right]\underline{e}_3$$

ALLORA CALCOLIAMO I TRE VETTORI $\boxed{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}}$

$$\underline{t}(s) = \frac{dP}{ds} = \left\{-\frac{R}{\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right), \frac{R}{\alpha}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right), \frac{h}{\alpha}\right\}$$

$$\underline{n}(s) = \{-\cos\varphi, -\mathrm{sen}\,\varphi, 0\} = \left\{-\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right), -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right), 0\right\}$$

$$\underline{b}(s) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -\frac{R}{\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right) & \frac{R}{\alpha}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) & \frac{h}{\alpha} \\ -\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\underline{b}(s) = \left\{\frac{h}{\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right), -\frac{h}{\alpha}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right), \frac{R}{\alpha}\right\}$$

APPLICANDO LE FORMULE DI FRENET AVREMO:

$$\begin{cases} \frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{1}{R_c(s)}\underline{n} \\ \frac{d\underline{t}}{ds} = \left\{-\frac{R}{\alpha^2}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right), -\frac{R}{\alpha^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right), 0\right\} = \frac{R}{\alpha^2}\underline{n} \end{cases}$$

DAL CONFRONTO $\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_c} = \frac{R}{\alpha^2}}$

QUINDI $\boxed{c(s) = \frac{R}{\alpha^2}}$ ED $\boxed{R_c(s) = \frac{\alpha^2}{R} = \frac{R^2+h^2}{R}}$

ANALOGAMENTE:

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \tau(s)\,\underline{n}$$

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \left\{ \frac{u}{\alpha^2}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right), \frac{u}{\alpha^2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\alpha}\right), 0 \right\} = -\frac{u}{\alpha^2}\,\underline{n}$$

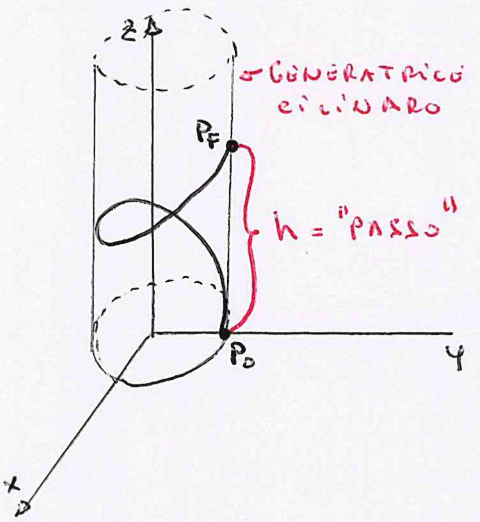
DA CUI PER COME E' STATA DEFINITA, DAL CONFRONTO, AVREMO

$$\boxed{\tau(s) = -\frac{u}{\alpha^2} = -\frac{u}{R^2+u^2}}$$

INFINE E' POSSIBILE VERIFICARE LA 3ª FORMULA DI FRENET

$$\frac{d\underline{n}}{ds} = -c(s)\,\underline{t} - \tau(s)\,\underline{b}$$

SE CONSIDERIAMO UN "GIRO COMPLETO" $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 2\pi$



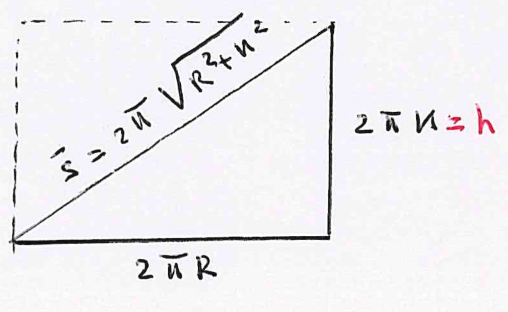
E CALCOLIAMO IL "PASSO" h

$$h = \int_0^h dz = u\int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow \boxed{h = 2\pi u}$$

MENTRE DI CONTRO LA LUNGHEZZA DELLA CORRISPONDENTE TRAIETTORIA

$$\bar{s} = \alpha\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\alpha = \boxed{2\pi\sqrt{R^2+u^2} = \bar{s}}$$

QUINDI SE "TOPOLOGICAMENTE" "APRIAMO" LA SUPERFICE DEL CILINDRO LUNGO LA GENERATRICE CHE CONGIUNGE POSIZIONE INIZIALE E FINALE P_F AVREMO CHE LA TRAIETTORIA SARA' DATA DALLA DIAGONALE DEL RETTANGOLO OTTENUTO



STUDIAMO LA CINEMATICA DEL PUNTO P NEL RIF. NATURALE CON I VETTORI NORMALIZZATI.

COORDINATE POLARI (MOTO PIANO)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{e}_\rho = \dfrac{\partial P}{\partial \rho} = (\cos\theta\,,\ \mathrm{sen}\,\theta) \\ \underline{e}_\theta = \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ \rho\cos\theta) \end{cases}$$

LA BASE E' ORTOGONALE MA NON NORMALIZZATA.

LA BASE E' NORMALIZZATA $\quad \tilde{e}_\rho = \underline{e}_\rho \qquad \tilde{e}_\theta = \dfrac{1}{\rho}\,\underline{e}_\theta = (-\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta)$

RICORDIAMO CHE:

BASE NON NORMALIZZATA:

$$\underline{u} = u^\alpha \underline{e}_\alpha = u_\alpha \underline{e}^\alpha$$

$$\begin{cases} u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \\ u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\, e^\beta \\ \underline{e}^\alpha = g^{\alpha\beta}\, e_\beta \end{cases}$$

$$g_{\alpha\beta} = (\underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta) \qquad g^{\alpha\beta} = (\underline{e}^\alpha \cdot \underline{e}^\beta)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{e}_\alpha = u^\beta\, \underline{e}_\beta \cdot \underline{e}_\alpha = u^\beta g_{\beta\alpha} = u_\alpha$$

BASE NORMALIZZATA

$$\underline{u} = \hat{u}_\alpha\, \tilde{e}_\alpha \qquad \text{dove } \hat{u}^\alpha = \hat{u}_\alpha$$
$$\hat{e}_\alpha = \hat{e}^\alpha$$

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$
$$\hat{u}_\alpha = \underline{u} \cdot \underline{e}_\alpha$$

$$\begin{cases} \underline{v} = \dot{x}_1 \underline{e}_1 + \dot{x}_2 \underline{e}_2 \\ \underline{a} = \ddot{x}_1 \underline{e}_1 + \ddot{x}_2 \underline{e}_2 \end{cases} \qquad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \text{ BASE FISSA}$$

x_i = COORDINATE CARTESIANE.

"UTILIZZIAMO LA BASE NORMALIZZATA"

CERCHIAMO LE $\tilde{v}_\alpha$ e le $\hat{a}_\alpha$ ESSENDO $\underline{v} = \tilde{v}_\alpha \hat{e}_\alpha \quad \underline{a} = \hat{a}_\alpha \hat{e}_\alpha$

$$\begin{cases} \tilde{e}_\rho = (\cos\theta\,,\ \mathrm{sen}\,\theta) \\ \tilde{e}_\theta = (-\mathrm{sen}\,\theta\,,\ \cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{\rho}\cos\theta - \dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} - \dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} - \rho\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\rho}\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{\rho}\cos\theta\,\dot{\theta} - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}^2 + \rho\cos\theta\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\rho}\cos\alpha - 2\dot{\rho}\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \rho\cos\alpha\,\dot{\alpha}^2 - \rho\ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\dot{\rho}\dot{\alpha}\cos\alpha - \rho\dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + \rho\ddot{\alpha}\cos\alpha$$

PER CALCOLARE LE COMPONENTI DI $\underline{v}$ ed $\underline{a}$

$$\underline{v}\cdot\hat{\underline{e}}_\alpha = \hat{v}_\alpha$$

$$\underline{v} = (\dot{\rho}\cos\alpha - \rho\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\underline{e}_1 + (\dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha)\,\underline{e}_2$$

$$\begin{cases} \tilde{e}_\rho = \cos\alpha\,\underline{e}_1 + \mathrm{sen}\,\alpha\,\underline{e}_2 \\ \tilde{e}_\alpha = -\mathrm{sen}\,\alpha\,\underline{e}_1 + \cos\alpha\,\underline{e}_2 \end{cases}$$

$$\tilde{v}_\rho = \underline{v}\cdot\tilde{e}_\rho = \dot{\rho}\cos^2\alpha - \cancel{\rho\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} + \dot{\rho}\,\mathrm{sen}^2\alpha + \cancel{\rho\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

$$= \dot{\rho}$$

$$\tilde{v}_\alpha = \underline{v}\cdot\tilde{\underline{e}}_\alpha = -\cancel{\dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} + \rho\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}^2\alpha + \cancel{\dot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} + \rho\dot{\alpha}\cos^2\alpha$$

$$= \rho\dot{\alpha}$$

QUINDI $\boxed{\underline{v} = \tilde{v}_\rho\,\hat{\underline{e}}_\rho + \tilde{v}_\alpha\,\hat{\underline{e}}_\alpha = \dot{\rho}\,\tilde{\underline{e}}_\rho + \rho\dot{\alpha}\,\tilde{e}_\alpha}$

<u>NOTA:</u> $\hat{v}_\rho = \tilde{v}^\rho$, $\hat{v}_\alpha = \hat{v}^\alpha$ $\hat{\underline{e}}_\rho = \hat{\underline{e}}^\rho$ $\hat{\underline{e}}_\alpha = \hat{e}^\alpha$.

$$\hat{a}_\rho = \underline{a}\cdot\hat{e}_\rho = \{(\ddot{\rho}\cos\alpha - 2\dot{\rho}\dot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha - \rho\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \rho\ddot{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\underline{e}_1$$

$$+ (\ddot{\rho}\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\dot{\rho}\dot{\alpha}\cos\alpha - \rho\dot{\alpha}^2\,\mathrm{sen}\,\alpha + \rho\ddot{\alpha}\cos\alpha)\,\underline{e}_2\}\,\cdot$$

$$\cdot\,\{\cos\alpha\,\underline{e}_1 + \mathrm{sen}\,\alpha\,\underline{e}_2\}$$

$$\tilde a_\rho = \ddot\rho\cos^2\alpha - \cancel{2\dot\rho\dot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} - \rho\dot\alpha^2\cos^2\alpha - \cancel{\rho\ddot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$+\ddot\rho\,\mathrm{sen}^2\alpha + \cancel{2\dot\rho\dot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} - \rho\dot\alpha^2\mathrm{sen}^2\alpha + \cancel{\rho\ddot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$= \ddot\rho - \rho\dot\alpha^2$$

$$\tilde a_\alpha = \underline{a}\cdot\tilde e_\alpha = \{(\ddot\rho\cos\alpha - 2\dot\rho\dot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha - \rho\dot\alpha^2\cos\alpha - \rho\ddot\alpha\,\mathrm{sen}\alpha)\,\underline{e}_1$$

$$+(\ddot\rho\,\mathrm{sen}\alpha + 2\dot\rho\dot\alpha\cos\alpha - \rho\dot\alpha^2\mathrm{sen}\alpha + \rho\ddot\alpha\cos\alpha)\,\underline{e}_2\}\cdot$$

$$\cdot\{-\mathrm{sen}\alpha\,\underline{e}_1 + \cos\alpha\,\underline{e}_2\}$$

$$= \cancel{-\ddot\rho\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} + 2\dot\rho\dot\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha + \cancel{\rho\dot\alpha^2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} + \rho\ddot\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha$$

$$+\cancel{\ddot\rho\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} + 2\dot\rho\dot\alpha\cos^2\alpha - \cancel{\rho\dot\alpha^2\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha} + \rho\ddot\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 2\dot\rho\dot\alpha + \rho\ddot\alpha$$

QUINDI

$$\boxed{\underline{a} = \tilde a_\rho\,\hat{\underline{e}}_\rho + \hat a_\alpha\,\hat e_\alpha = (\ddot\rho - \rho\dot\alpha^2)\,\hat{\underline{e}}_\rho + (2\dot\rho\dot\alpha + \rho\ddot\alpha)\,\tilde e_\alpha}$$

NOTA: $\hat a_\rho = \hat a^\rho$, $\hat a_\alpha = \hat a^\alpha$ $\hat{\underline{e}}_\rho = \hat e^\rho$ $\hat e_\alpha = \hat e^\alpha$.

$$\begin{cases} (P-O) = \rho\,\hat{\underline{e}}_\rho \\ \underline{v} = \dot\rho\,\tilde{\underline{e}}_\rho + \rho\dot\alpha\,\hat{\underline{e}}_\alpha \\ \underline{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\alpha^2)\,\hat{\underline{e}}_\rho + (2\dot\rho\dot\alpha + \rho\ddot\alpha)\,\hat{\underline{e}}_\alpha \end{cases}$$

NEL CASO DEL MOTO CIRCOLARE $\dot\rho = 0$ IN QUANTO $\rho = R =$ costante

$(P-O) = R\,\tilde{\underline{e}}_\rho$ $\quad \underline{v} = R\dot\alpha\,\hat{\underline{e}}_\alpha$ $\quad \underline{a} = R\ddot\alpha\,\hat{\underline{e}}_\alpha - R\dot\alpha^2\,\hat{\underline{e}}_\rho$

SE USIAMO FRENET

$\Rightarrow v = \dot s\,\underline{t} = R\dot\alpha\,\underline{t}$ $\quad \underline{a} = \ddot s\,\underline{t} + \frac{\dot s^2}{R} = R\ddot\alpha\,\underline{t} + R\dot\alpha^2\,\underline{n}$

NOTA: SE UTILIZZIAMO LA BASE NON NORMALIZZATA

DOVREMO DISTINGUERE COMPONENTI CONTROVARIANTI E COVARIANTI

$$\underline{e}_\varrho = \cos\varphi\, \underline{e}_1 + \sin\varphi\, \underline{e}_2$$
$$\underline{e}_\varphi = -\varrho \sin\varphi\, \underline{e}_1 + \varrho\cos\varphi\, \underline{e}_2$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varrho^2 \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$\underline{V}\cdot\underline{e}_\alpha = V^\beta \underline{e}_\beta \cdot \underline{e}_\alpha = V^\beta g_{\beta\alpha} = V_\alpha$$

DA CUI

$$\begin{cases} \underline{V}\cdot\underline{e}_\varrho = V_\varrho = \dot\varrho \\ \underline{V}\cdot\underline{e}_\varphi = V_\varphi = \varrho^2\dot\varphi \end{cases}$$

$$\underline{V} = V_\alpha \underline{e}^\alpha = V^\alpha \underline{e}_\alpha$$
$$V^\alpha = g^{\alpha\beta} V_\beta$$

DA CUI $\begin{cases} V^\varrho = g^{11} V_1 = \dot\varrho \\ V^\varphi = g^{22} V_2 = \dot\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \underline{V} = \dot\varrho\, \underline{e}_\varrho + \dot\varphi\, \underline{e}_\varphi \\ \underline{V} = \dot\varrho\, \underline{e}^\varrho + \varrho^2\dot\varphi\, \underline{e}^\varphi \end{cases}$

OSSERVIAMO CHE POSSIAMO PASSARE ALLA BASE NORMALIZZATA ALLA FINE RICORDANDO CHE $\underline{e}_\varrho = \hat{\underline{e}}_\varrho$
$\underline{e}_\varphi = \varrho\, \hat{\underline{e}}_\varphi$

DA CUI

$$\underline{V} = \dot\varrho\, \underline{e}_\varrho + \dot\varphi\, \underline{e}_\varphi = \dot\varrho\, \hat{\underline{e}}_\varrho + \varrho\dot\varphi\, \hat{\underline{e}}_\varphi$$

CHE È IL RISULTATO DI PRIMA.

SOLO CHE IN QUESTO CASO $\hat V_\varrho = \hat V^\varrho = \dot\varrho$ $\hat V_\varphi = \hat V^\varphi = \varrho\dot\varphi$

ANALOGAMENTE:

$$\underline{a}\cdot\underline{e}_\varrho = a_\varrho = \ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2 \qquad a^\varrho = g^{11} a_\varrho = (\ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2)$$
$$\Rightarrow$$
$$\underline{a}\cdot\underline{e}_\varphi = (2\dot\varrho\dot\varphi + \varrho\ddot\varphi)\varrho = a_\varphi \qquad a^\varphi = g^{22} a_\varphi = \frac{1}{\varrho}(2\dot\varrho\dot\varphi + \varrho\ddot\varphi)$$
$$\underline{a} = (\ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2)\underline{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}(2\dot\varrho\dot\varphi + \varrho\ddot\varphi)\underline{e}_\varphi = (\ddot\varrho - \varrho\dot\varphi^2)\hat{\underline{e}}_\varrho + (2\dot\varrho\dot\varphi + \varrho\ddot\varphi)\hat{\underline{e}}_\varphi$$

COORDINATE NATURALI: CILINDRICHE

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\sin\theta \\ x_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_\rho = \dfrac{\partial P}{\partial \rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \underline{e}_\theta = \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0) \\ \underline{e}_z = \dfrac{\partial P}{\partial z} = (0, 0, 1) \end{cases}$$

MENTRE LA BASE NORMALIZZATA SARÀ

$$\hat{\underline{e}}_\rho = \underline{e}_\rho \qquad \hat{\underline{e}}_\theta = \frac{1}{\rho}\underline{e}_\theta \qquad \hat{e}_z = \underline{e}_z$$

$$\begin{cases} \hat{\underline{e}}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \hat{\underline{e}}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \hat{\underline{e}}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{x}_3 = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{v = \dot{x}_1\underline{e}_1 + \dot{x}_2 e_2 + \dot{x}_3\underline{e}_3}$$

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \cos\theta\,\underline{e}_1 + \sin\theta\,\underline{e}_2 \\ \hat{\underline{e}}_\theta = -\sin\theta\,\underline{e}_1 + \cos\theta\, e_2 \\ \tilde{\underline{e}}_z = e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \ddot{\rho}\cos\theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \rho\ddot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{x}_2 = \ddot{\rho}\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta - \rho\dot{\theta}^2\sin\theta + \rho\ddot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{x}_3 = \ddot{z} \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{a} = \ddot{x}_1\underline{e}_1 + \ddot{x}_2\underline{e}_2 + \ddot{x}_3\underline{e}_3}$$

CALCOLIAMO LE COMPONENTI DI $\underline{v}$ ed $\underline{a}$

$$\tilde{v}_\rho = \underline{v}\cdot\tilde{\underline{e}}_\rho = \dot{\rho}\;;\quad \tilde{v}_\theta = \underline{v}\cdot\tilde{\underline{e}}_\theta = \rho\dot{\theta}\;;\quad \tilde{v}_z = \dot{z}$$

$$\hat{a}_\rho = \underline{a}\cdot\tilde{\underline{e}}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\;;\quad \hat{a}_\theta = \underline{a}\cdot\hat{\underline{e}}_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\;;\quad \hat{a}_z = \underline{a}\,\tilde{\underline{e}}_z = \ddot{z}$$

$$\begin{cases} (P-O) = \rho\,\tilde{\underline{e}}_\rho + z\,\hat{\underline{e}}_z \\ \underline{v} = \dot{\rho}\,\tilde{\underline{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\tilde{\underline{e}}_\theta + \dot{z}\,\tilde{\underline{e}}_z \\ \underline{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\tilde{\underline{e}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\tilde{\underline{e}}_\theta + \ddot{z}\,\tilde{\underline{e}}_z \end{cases}$$

NEL CASO DEL MOTO ELICOIDALE

$\rho = R = \text{costante}$

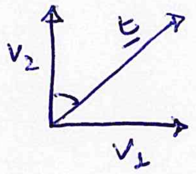
$$(P-O) = R\,\tilde{e}_\rho + z\,\tilde{e}_z$$

$$\underline{v} = R\dot{\theta}\,\tilde{e}_\theta + \dot{z}\,\tilde{e}_z$$

$$a = (-R\dot{\theta}^2)\,\tilde{e}_\rho + (R\ddot{\theta})\,\tilde{e}_\theta + \ddot{z}\,\tilde{e}_z$$

OSSERVIAMO CHE $\underline{v} = v_1\,\tilde{e}_\theta + v_2\,\tilde{e}_z$ SE IL MOTO È ELICOIDALE

SE



$$\frac{R\dot{\theta}}{\dot{z}} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = k\dot{\theta}$$

$$\boxed{\underline{v} = R\dot{\theta}\,\tilde{e}_\theta + k\dot{\theta}\,\tilde{e}_z} \rightarrow |\underline{v}| = \dot{\theta}\sqrt{R^2+k^2}$$

$$\underline{a} = (-R\dot{\theta}^2)\,\tilde{e}_\rho + (R\ddot{\theta})\,\tilde{e}_\theta + (k\ddot{\theta})\,\tilde{e}_z$$

IN PARTICOLARE SE IL MOTO È UNIFORME $|v| = \text{cost} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cost.}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \qquad \underline{a} = -R\dot{\theta}^2\,\tilde{e}_\rho$

CONFRONTIAMOLE CON LE FORMULE DI FRENET.

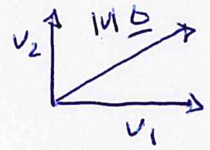
$\underline{v} = \dot{s}\,\underline{t}$ DOVE $s = \alpha\theta$ CON $\alpha = \sqrt{R^2+k^2}$

DA CUI $\begin{cases} \dot{s} = \alpha\dot{\theta} \\ \ddot{s} = \alpha\ddot{\theta} \end{cases}$

$$\boxed{t = \frac{R}{\alpha}\,\tilde{e}_\theta + \frac{k}{\alpha}\,\tilde{e}_z}$$

QUINDI

$$\underline{v} = \alpha\dot{\theta}\,\underline{t} = \left[\dot{\theta}\sqrt{R^2+k^2}\right]\underline{t}$$



$$\underline{a} = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{\tilde{R}}\,\underline{n} = \alpha\ddot{\theta}\,\underline{t} + \frac{\alpha^2\dot{\theta}^2}{\tilde{R}}\,\underline{n} \qquad \tilde{R} = \frac{\alpha^2}{R}$$

$$= \alpha\ddot{\theta}\,\underline{t} + R\dot{\theta}^2\,\underline{n}$$

$\alpha\ddot{\theta}\,\underline{t} = \ddot{\theta}\left[R\,\tilde{e}_\theta + k\,\tilde{e}_z\right]$ INFATTI $\alpha\dot{\theta} = \dot{\theta}\sqrt{R^2+k^2}$

QUINDI $$a = \underbrace{\alpha \ddot{\omega}\, \underline{t}}_{\ddot{\omega}[R\underline{e}_\alpha + K\underline{e}_\beta]} + \underbrace{R\dot{\omega}^2 \underline{n}}_{-R\dot{\omega}^2 \underline{e}_\rho}$$

NEL CASO DI MOTO UNIFORME $\underline{a} = -R\dot{\omega}^2 \underline{e}_\rho = R\dot{\omega}^2 \underline{n}$

"COORDINATE NATURALI SFERICHE"

$$\begin{cases} x_1 = \rho \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi \\ x_2 = \rho \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi \\ x_3 = \rho \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{e}_\rho = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \{\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\alpha\} \\ \underline{e}_\alpha = \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \{\rho\cos\alpha\cos\varphi,\ \rho\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi,\ -\rho\operatorname{sen}\alpha\} \\ \underline{e}_\varphi = \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \{-\rho\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi,\ \rho\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi\ \ 0\} \end{cases}$$

MENTRE LA BASE NORMALIZZATA È DATA DA:

$$\hat{\underline{e}}_\rho = \underline{e}_\rho \qquad \hat{\underline{e}}_\alpha = \frac{1}{\rho}\underline{e}_\alpha \qquad \hat{\underline{e}}_\varphi = \frac{\underline{e}_\varphi}{\rho\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\begin{cases} \tilde{\underline{e}}_\rho = \{\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\alpha\} \\ \hat{\underline{e}}_\alpha = \{\cos\alpha\cos\varphi,\ \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi,\ -\operatorname{sen}\alpha\} \\ \hat{\underline{e}}_\varphi = \{-\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi + \rho\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi \\ \dot{x}_3 = \dot{\rho}\cos\alpha - \rho\dot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

DA CUI $\tilde{V}_\rho = \underline{V}\cdot\tilde{\underline{e}}_\rho = \{[\dot{\rho}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi]\underline{e}_1$
$+ [\dot{\rho}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha\operatorname{sen}\varphi + \rho\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi]\underline{e}_2$
$+ [\dot{\rho}\cos\alpha - \rho\dot{\alpha}\operatorname{sen}\alpha]\underline{e}_3\}\cdot$
$\cdot\{[\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi]\underline{e}_1 + [\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi]\underline{e}_2 + \cos\alpha\,\underline{e}_3\} =$

$$= \dot\rho\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\varphi + \rho\dot\alpha\,\cancel{\text{sen}\alpha\cos\alpha}\cos^2\varphi - \rho\dot\varphi\,\cancel{\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}$$

$$+ \dot\rho\,\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\varphi + \rho\dot\alpha\,\cancel{\text{sen}\alpha\cos\alpha}\,\text{sen}^2\varphi + \rho\dot\varphi\,\cancel{\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}$$

$$+ \dot\rho\cos^2\alpha - \cancel{\rho\dot\alpha\,\text{sen}\alpha\cos\alpha} = \dot\rho$$

$$\tilde v_\alpha = \underline{v}\cdot\hat{\underline{e}}_\alpha = \dot\rho\,\cancel{\text{sen}\alpha\cos\alpha}\cos^2\varphi + \rho\dot\alpha\cos^2\alpha\cos^2\varphi$$

$$- \cancel{\rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi} + \dot\rho\,\cancel{\text{sen}\alpha\cos\alpha}\,\text{sen}^2\varphi$$

$$+ \rho\dot\alpha\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\varphi + \cancel{\rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}$$

$$- \dot\rho\,\cancel{\text{sen}\alpha\cos\alpha} + \rho\dot\alpha\,\text{sen}^2\alpha = \rho\dot\alpha$$

$$\tilde v_\varphi = \underline{v}\cdot\hat{\underline{e}}_\varphi = -\cancel{\dot\rho\,\text{sen}\alpha\cos\varphi\,\text{sen}\varphi} - \cancel{\rho\dot\alpha\cos\alpha\cos\varphi\,\text{sen}\varphi}$$

$$+ \rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}^2\varphi + \cancel{\dot\rho\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}$$

$$+ \cancel{\rho\dot\alpha\cos\alpha\,\text{sen}\varphi\cos\varphi} + \rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos^2\varphi$$

$$= \rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha$$

$$\boxed{\underline{v} = \dot\rho\,\hat{\underline{e}}_\rho + (\rho\dot\alpha)\,\hat{\underline{e}}_\alpha + (\rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha)\,\hat{\underline{e}}_\varphi}$$

$$\ddot x_1 = \ddot\rho\,\text{sen}\alpha\cos\varphi + \rho\ddot\alpha\cos\alpha\cos\varphi - \rho\ddot\varphi\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi$$
$$- \rho\dot\alpha^2\,\text{sen}\alpha\cos\varphi - \rho\dot\varphi^2\,\text{sen}\alpha\cos\varphi + 2\dot\rho\dot\alpha\cos\alpha\cos\varphi$$
$$- 2\dot\rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi - 2\rho\dot\alpha\dot\varphi\cos\alpha\,\text{sen}\varphi$$

$$\ddot x_2 = \ddot\rho\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi + \rho\ddot\alpha\cos\alpha\,\text{sen}\varphi + \rho\ddot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos\varphi$$
$$- \rho\dot\alpha^2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi - \rho\dot\varphi^2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi + 2\dot\rho\dot\alpha\cos\alpha\,\text{sen}\varphi$$
$$+ 2\rho\dot\alpha\dot\varphi\cos\alpha\cos\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi\,\text{sen}\alpha\cos\varphi.$$

$$\ddot x_3 = \ddot\rho\cos\alpha - \rho\ddot\alpha\,\text{sen}\alpha - \rho\dot\alpha^2\cos\alpha - 2\dot\rho\dot\alpha\,\text{sen}\alpha$$

Da cui

$\hat{a}_\rho = \underline{a}\cdot\hat{e}_\rho = \ddot\rho\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \rho\ddot\alpha\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}\cos^2\varphi$

$-\rho\ddot\varphi\sin^2\alpha\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} - \rho\dot\alpha^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi - \rho\dot\varphi^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi$

$+2\dot\rho\dot\alpha\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha\cos^2\varphi - \cancel{2\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi} -$

$-\cancel{2\rho\dot\alpha\dot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi} +$

$+\ddot\rho\sin^2\alpha\sin^2\varphi + \rho\ddot\alpha\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}\sin^2\varphi + \rho\ddot\varphi\sin^2\alpha\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}$

$-\rho\dot\alpha^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi - \rho\dot\varphi^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi + 2\dot\rho\dot\alpha\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha\sin^2\varphi$

$+\cancel{2\rho\dot\alpha\dot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{2\dot\rho\dot\varphi\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}$

$+\ddot\rho\cos^2\alpha - \rho\ddot\alpha\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha - \rho\dot\alpha^2\cos^2\alpha - 2\dot\rho\dot\alpha\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha$

$= \ddot\rho - \rho\dot\alpha^2 - \rho\dot\varphi^2\sin^2\alpha$

$\hat{a}_\alpha = \underline{a}\cdot\hat{e}_\alpha = \cancel{\ddot\rho\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi} + \rho\ddot\alpha\cos^2\alpha\cos^2\varphi$

$-\cancel{\rho\ddot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{\rho\dot\alpha^2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi}$

$-\rho\dot\varphi^2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi + 2\dot\rho\dot\alpha\cos^2\alpha\cos^2\varphi$

$-\cancel{2\dot\rho\dot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{2\rho\dot\alpha\dot\varphi\cos^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi}$

$+\cancel{\ddot\rho\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi} + \rho\ddot\alpha\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \cancel{\rho\ddot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}$

$-\cancel{\rho\dot\alpha^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi} - \rho\dot\varphi^2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi + 2\dot\rho\dot\alpha\cos^2\alpha\sin^2\varphi$

$+\cancel{2\rho\dot\alpha\dot\varphi\cos^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{2\dot\rho\dot\varphi\sin\alpha\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi}$

$\cancel{+\ddot\rho\sin\alpha\cos\alpha} + \rho\ddot\alpha\sin^2\alpha + \cancel{\rho\dot\alpha^2\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\rho\dot\alpha\sin^2\alpha$

$= \rho\ddot\alpha - \rho\dot\varphi^2\sin\alpha\cos\alpha + 2\dot\rho\dot\alpha$

$$\tilde{a}_\varphi = \underline{a} \cdot \tilde{e}_\varphi = -\cancel{\ddot{\rho}\, sen\theta\, sen\varphi \cos\varphi} - \cancel{\rho\ddot{\theta} \cos\theta\, sen\varphi \cos\varphi}$$

$$+ \underbrace{\rho\ddot{\varphi}\, sen\theta\, sen^2\varphi}_{/} + \cancel{\rho\dot{\theta}^2\, sen\theta\, sen\varphi\cos\varphi} + \cancel{\rho\dot{\varphi}^2\, sen\theta\, sen\varphi \cos\varphi}$$

$$- \cancel{2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta\, sen\varphi\cos\varphi} + \underbrace{2\dot{\rho}\dot{\varphi}\, sen\theta\, sen^2\varphi}_{//} + \underbrace{2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\, sen^2\varphi}_{\triangle}$$

$$+ \cancel{\ddot{\rho}\, sen\theta\, sen\varphi\cos\varphi} + \cancel{\rho\ddot{\theta}\cos\theta\, sen\varphi\cos\varphi} + \underbrace{\rho\ddot{\varphi}\, sen\theta\cos^2\varphi}_{/}$$

$$- \cancel{\rho\dot{\theta}^2\, sen\theta\, sen\varphi\cos\varphi} - \cancel{\rho\dot{\varphi}^2\, sen\theta\, sen\varphi\cos\varphi} + \cancel{2\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta\, sen\varphi\cos\varphi}$$

$$+ \underbrace{2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos^2\varphi}_{\triangle} + \underbrace{2\dot{\rho}\dot{\varphi}\, sen\theta\cos^2\varphi}_{//} =$$

$$= \rho\ddot{\varphi}\, sen\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\, sen\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$$

DA CUI:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2 sen^2\theta)\,\underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2 sen\theta\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\\ &+ (\rho\ddot{\varphi}\, sen\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\, sen\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\,\underline{e}_\varphi \end{aligned}}$$

DA CUI AVREMO:

$$\begin{cases} (P-O) = \rho\, \underline{e}_\rho \\ \underline{v} = \dot{\rho}\, \tilde{e}_\rho + (\rho\dot{\theta})\, \underline{e}_\theta + (\rho\dot{\varphi}\, sen\theta)\, \tilde{e}_\varphi \\ a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2 sen^2\theta)\, \underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2 sen\theta\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \end{cases}$$

$$+ (\rho\ddot{\varphi}\, sen\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\, sen\theta + 2\rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\, \underline{e}_\varphi$$