APPENDICE N° 2

**QUESITO** ESERCITAZIONI MATEMATICHE **del 16 Maggio 2016**

Sia $A$ una matrice simmetrica reale, essendo $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ con $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Sia $\Phi$ una qualsiasi funzione scalare di $A$, tale che, per tutte le trasformazioni ortogonali $Q$, si abbia

$$\Phi(A) = \Phi(QAQ^t) \tag{1}$$

Provare che il set di scalari $\{Tr(A), Tr(A^2), Tr(A^3)\}$ costituisce una base funzionale per la $\Phi(A)$, cioè che per qualsiasi trasformazione ortogonale $Q$, soddisfacente la (1) avremo:

$$\Phi(A) = \Phi(Tr(A), Tr(A^2), Tr(A^3))$$

*Soluzione.* Dato che la matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ è simmetrica esiste una matrice ortogonale $P \in O(3)$ tale che

$$PAP^t = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = D. \tag{2}$$

da cui si ha anche

$$A^n = P^{-1}D^nP. \tag{3}$$

La $\Phi$ è invariante per trasformazioni ortogonali quindi

$$\Phi(A) = \Phi(PAP^{-1}) = \Phi(D)$$

cioè $\Phi$ dipende soltanto dai tre autovalori $x_1, x_2, x_3$.
Per ogni matrice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ si ha $Tr(AB) = Tr(BA)$, infatti

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = Tr(BA). \tag{4}$$

Utilizzando le (3) e (4) otterremo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= Tr(D) = Tr(A) \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= Tr(D^2) = Tr(A^2) \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= Tr(D^3) = Tr(A^3) \end{aligned} \tag{5}$$

osserviamo che $x_1, x_2, x_3$ possono essere ottenute in funzione di $Tr(A), Tr(A^2), Tr(A^3)$, infatti facendo le posizioni

$$s = x_1 + x_2 + x_3 = Tr(A)$$

$$q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2}\left\{[Tr(A)]^2 - Tr(A^2)\right\}$$

$$p = x_1x_2x_3 = \frac{1}{6}\left\{[Tr(A)]^3 - 3\,Tr(A)\,Tr(A^2) + 2\,Tr(A^3)\right\}$$

$x_1, x_2, x_3$ sono le soluzioni dell'equazione

$$x^3 - sx^2 + qx - p = 0$$

i cui coefficienti possono essere espressi solo in funzione di $Tr(A), Tr(A^2), Tr(A^3)$.

□

**Nota della redazione:** Il sistema (5) puó essere risolto utilizzando esplicitamente le ben note relazioni di Newton-Girard. Infatti dato il piú generale sistema

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = S_1\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = S_2\\
&\vdots\\
&x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n = S_n
\end{aligned} \tag{6}$$

é possibile provare che le soluzioni $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, del sistema (6) sono le radici della equazione algebrica di grado $n$

$$\alpha_0\, x^n + \alpha_1\, x^{n-1} + \alpha_2\, x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\, x + \alpha_n = 0 \qquad \text{con} \quad \alpha_0 \neq 0. \tag{7}$$

dove per mezzo delle relazioni di Newton-Girard si ottiene

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\, S_1 = -\alpha_1\\
&\alpha_0\, S_2 + \alpha_1\, S_1 = -2\,\alpha_2\\
&\alpha_0\, S_3 + \alpha_1\, S_2 + \alpha_2\, S_1 = -3\,\alpha_3\\
&\vdots\\
&\alpha_0\, S_n + \alpha_1\, S_{n-1} + \alpha_2\, S_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\, S_1 = -n\,\alpha_n
\end{aligned} \tag{8}$$

da cui, banalmente, si ha che tutte le quantitá $\{\alpha_1/\alpha_0,\, \alpha_2/\alpha_0, \cdots \alpha_n/\alpha_0\}$ potranno sempre essere espresse in funzione delle $S_k$. Conseguentemente tutte le radici $\{x_1,\, x_2, \cdots x_n\}$ del polinomio (7) (e quindi le soluzioni del sistema (6)) saranno espresse in termini delle quantitá $\{S_1,\, S_2, \cdots S_n\}$.
Cosí , ad esempio, per $n = 3$ avremo

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = -S_1, \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_0} = \frac{1}{2}\,(S_1^2 - S_2), \qquad \frac{\alpha_3}{\alpha_0} = -\frac{1}{6}\,(S_1^3 - 3\,S_1\,S_2 + 2\,S_3),$$

dove identificando con $S_1 = Tr(A)$, $S_2 = Tr(A^2)$ ed $S_3 = Tr(A^3)$ otterremo il risultato precedente.
Quanto appena detto ci consente, banalmente, di generalizzare la dimostrazione del quesito proposto quando $\alpha, \beta = 1, \cdots, n$. Infatti, utilizzando le relazioni (1)-(4), (6)-(8) ed identificando con $S_1 = Tr(A)$, $S_2 = Tr(A^2), \cdots S_n = Tr(A^n)$, é immediato provare che, per qualsiasi trasformazione ortogonale $\mathbf{Q}$ soddisfacente la (1), in questo caso si avrá

$$\Phi\,(\mathbf{A}) = \Phi\,\left(Tr\mathbf{A},\, Tr\mathbf{A}^2, \cdots, Tr\mathbf{A}^n\right).$$

Prof. DONATO GRECO
Ordinario nell' Università di Napoli

Prof. GUIDO STAMPACCHIA
Ordinario nell' Università di Pisa

# ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

VOLUME PRIMO

LIGUORI EDITORE - NAPOLI

mando si trova :

$$\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}\bar{\lambda}_i\lambda_j = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\bar{\lambda}_i$$

che, essendo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\bar{\lambda}_i \neq 0$, si puo' scrivere

$$\alpha = \frac{1}{\Sigma \lambda_i\bar{\lambda}_i} \sum_{i,j}^{1\ldots n} \bar{a}_{ij}\bar{\lambda}_i\lambda_j = \frac{1}{\Sigma \lambda_i\bar{\lambda}_i} \sum_{i,j}^{1\ldots n} a_{j,i}\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j = \bar{\alpha}$$

Il numero $\alpha$ e' pertanto reale.

24.- Si dice che una espressione razionale intera $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e' una funzione simmetrica di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se il suo valore non si altera per una qualunque permutazione delle variabili. In simboli :

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

essendo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ una qualunque permutazione degli indici $1, 2, \ldots, n$.

Sono, ad esempio, funzioni simmetriche di $x_1, x_2, x_3$, le seguenti :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$$

Le note relazioni fra le radici e i coefficienti di una equazione algebrica mostrano che: *i coefficienti di una equazione sono funzioni simmetriche delle sue radici* e, di conseguenza: *ogni espressione razionale dei* *coefficienti e' funzione simmetrica delle radici.*

Inversamente si dimostra che *ogni funzione simmetrica (razionale intera) delle radici di un'equazione si esprime in funzione razionale dei coefficienti.*

Si giunge a questo risultato dimostrando dapprima che si esprimono in funzione razionale intera dei coefficienti le particolari funzioni

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_n^k , \quad (k = 1, 2, \dots\dots)$$

che sono somme di potenze simili delle n radici della equazione algebrica (di grado n) considerata :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Si trovano le seguenti relazioni di Newton-Girard:

$$(5) \quad \begin{cases} a_0 s_1 = -a_1 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 = -2a_2 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 = -3a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \dots + a_{n-2} s_1 = -(n-1) a_{n-1} \end{cases}$$

$$(5') \quad \begin{cases} a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s_1 + a_n s_0 = 0 \\ a_0 s_{n+1} + a_1 s_n + \dots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 s_{n+m} + a_1 s_{n+m-1} + \dots + a_{n-1} s_{m+1} + a_n s_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si noti che le relazioni (5) e (5') sono lineari omogenee rispetto ai coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots$; esse possono percio' servire ad esprimere i valori dei rapporti $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, .... in funzione razionale delle $s_k$.

Si ha, ad esempio :

$$\frac{a_1}{a_0} = - s_1 \quad , \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2)$$

$$\frac{a_3}{a_0} = - \frac{1}{6} (s^3_1 - 3s_1 s_2 + 2s_3) \ldots$$

Si puo', servendosi di tali formole, scrivere l'equazione quando si conoscono le somme delle potenze simili delle radici.

25.- *Costruire e risolvere l'equazione di quarto grado per la quale si ha :*

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = 4$$

Posto $a_0 = 1$ si trova:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad e \quad a_4 = - 1.$$

L'equazione cercata e' dunque :

$$x^4 - 1 = 0$$

e le sue radici sono: 1, -1, i, -i.

26 - *Dette* $x_1$, $x_2$ *le radici di un'equazione di secondo grado, trovare la condizione perche'il punto di coordinate* $(x_1, x_2)$ *sia su una circonferenza di centro nell'origine e raggio* R .

Detta

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

l'equazione, si trova:

$$a^2_1 - 2 a_2 = R^2 .$$