

# Equilibrio e Stabilità

Corrado Santoro

**ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory**

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

## Definizione di Stato di Equilibrio

Uno stato  $\bar{x} = x(T^*)$  si definisce di **equilibrio** per l'ingresso  $u(t)$  se accade:

$$f(\bar{x}, u(t)) = 0, \forall t \geq T^*$$

## Equilibrio e ingresso costante

Sia  $\bar{x} = x(T^*)$  punto di equilibrio per l'ingresso  $u(t)$ , allora, detto  $\bar{u} = u(T^*)$ ,  $\bar{x}$  è **punto di equilibrio anche per l'ingresso costante  $\bar{u}$** .

La ricerca dei punti di equilibrio può pertanto ridursi a considerare solo gli ingressi costanti.

## Ricerca dei punti di equilibrio

In un sistema LTI (lineare tempo-invariante)

- Se la matrice  $A$  è invertibile ( $|A| \neq 0$ ), i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione:

$$0 = Ax + B\bar{u}$$

con  $\bar{u} = \text{cost}$

$$\begin{aligned} Ax &= -B\bar{u} \\ x &= -A^{-1}B\bar{u} \end{aligned}$$

- Se la matrice  $A$  non è invertibile ( $|A| = 0$ ), vi sono o **infiniti punti** di equilibrio o **nessun punto** di equilibrio (dipende dall'ingresso  $\bar{u}$ )

## Ricerca dei punti di equilibrio

Un sistema discreto è caratterizzato dall'equazione di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

L'equilibrio (per un ingresso  $\bar{u}$ ) implica **assenza di variazione** dello stato, pertanto:

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad 0 = (A - I)\bar{x} + B\bar{u}$$

- Se la matrice  $(A - I)$  è invertibile, i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione:

$$x = -(A - I)^{-1} B\bar{u}$$

- Se la matrice  $(A - I)$  non è invertibile, vi sono o **infiniti punti** di equilibrio o **nessun punto** di equilibrio

# Equilibrio del Giunto Robotico

## Equazioni

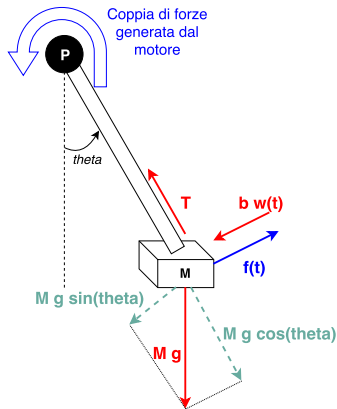
Da cui:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Equilibrio per  $f = cost = F$

$$\omega = 0 \quad \theta = \frac{1}{Mg} F$$



# Stabilità

## Stabilità Semplice

Un punto di equilibrio  $x_0 = x(T^*)$  si dice **stabile** quando, a seguito di una perturbazione dello stato al tempo  $\bar{t} \geq T^*$ , la traiettoria risultante rimane “vicino” il punto di equilibrio  $x_0$  per ogni  $t \geq \bar{t}$ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x(\bar{t}) : \|x(\bar{t}) - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\|x(t) - x_0\| < \epsilon, \forall t \geq \bar{t}$$

## Stabilità Asintotica

Un punto di equilibrio  $x_0 = x(T^*)$  si dice **asintoticamente stabile** quando, a seguito di una perturbazione dello stato al tempo  $\bar{t} \geq T^*$ , la traiettoria tende a  $x_0$  per  $t \rightarrow \infty$ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x(\bar{t}) : \|x(\bar{t}) - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

## Stabilità nei Sistemi LTI

In un sistema lineare tempo invariante, una traiettoria di stato è **stabile** quando tutte le possibili traiettorie di stato sono **stabili**. In tal caso si parla di **stabilità del sistema**.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

## Criterio di Stabilità nei Sistemi LTI **continui**

Un sistema LTI è

- **asintoticamente stabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **parte reale negativa**
- **semplicemente stabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **parte reale negativa o nulla** e quelli con parte reale nulla sono **semplici**
- **instabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **parte reale positiva** oppure se quelli con parte reale nulla **non sono semplici**

Gli autovalori di  $A$  sono detti **modi del sistema**

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

## Criterio di Stabilità nei Sistemi LTI **discreti**

Un sistema LTI è

- **asintoticamente stabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **modulo minore di 1**
- **semplicemente stabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **modulo minore o uguale a 1** e quelli con modulo pari a 1 sono **semplici**
- **instabile** se gli autolavori di  $A$  hanno **modulo maggiore di 1** oppure se quelli con modulo pari a 1 **non sono semplici**

# Equilibrio e Stabilità

Corrado Santoro

**ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory**

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici