

Segnali Canonici e Risposta di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

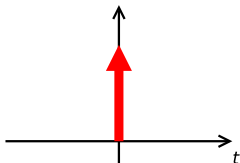
santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Si definiscono alcuni “segnali” (input) canonici che sono quelli più spesso utilizzati per studiare un sistema e capirne il comportamento.

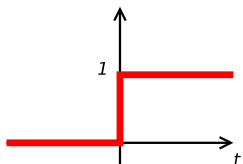
- **Impulso o delta di Dirac**
- **Gradino unitario**
- **Rampa**



Il **delta di Dirac** $\delta(t)$ o segnale impulsivo è matematicamente definito come segue:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta(t) & = & 0, \forall t \neq 0 \\ \delta(t) & = & +\infty, t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt & = & 1 \end{array} \right.$$

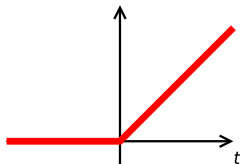
Esso è utilizzato per definire un fenomeno fisico di grande intensità ma di durata infinitesima.



Il **gradino unitario** $u(t)$ è un segnale costante definito come segue:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \forall t < 0 \\ u(t) = 1, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Esso è utilizzato per modellare l'applicazione, al tempo 0, di uno stimolo costante ad un sistema.



La **rampa** $r(t)$ è un segnale crescente definito come segue:

$$\begin{cases} r(t) = 0, \forall t < 0 \\ r(t) = t, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Esso è utilizzato per modellare l'applicazione ad un sistema, al tempo 0, di uno stimolo che cresce indefinitamente.

I segnali canonici godono di questa proprietà:

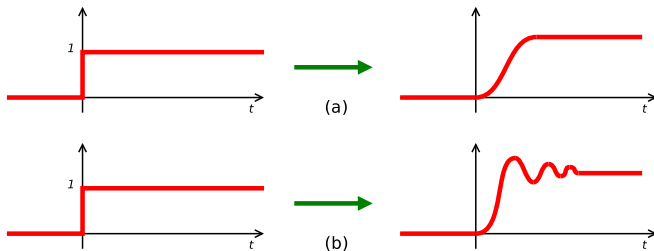
$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

$$\int_0^t u(\tau) d\tau = r(t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

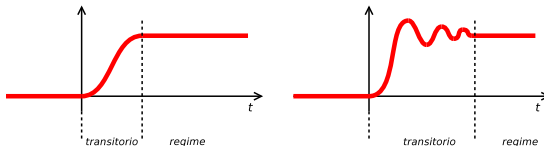
$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

Risposte tipiche di un sistema al gradino unitario



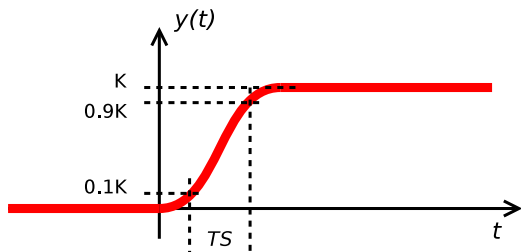
- **(a)** Sistema stabile con autovalori reali negativi
- **(b)** Sistema stabile con autovalori complessi e coniugati (a parte reale negativa)

Caratteristiche delle risposte al gradino



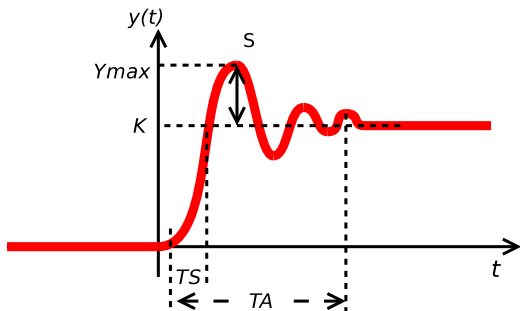
- **Transitorio:** risposta del sistema nella parte iniziale dell'evoluzione a partire dallo stato di quiete
- **Regime:** risposta del sistema dopo l'esaurimento del transitorio

Caratteristiche delle risposte al gradino



- **Guadagno a regime:** $K = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
- **Tempo di salita:** TS , tempo impiegato dall'uscita, durante il transitorio, per passare dal 10% al 90% del valore del guadagno a regime K
- **Tempo di assestamento:** TA , tempo impiegato dall'uscita, durante il transitorio, stabilizzarsi nell'intorno del guadagno a regime (2% - 5% di scostamento da K)

Caratteristiche delle risposte al gradino



- **Sovraelongazione:** $S = \frac{y_{max} - K}{K}$, percentuale massima di scostamento dall'uscita dal valore a regime
- **Tempo di assestamento:** TA , tempo impiegato dall'uscita, durante il transitorio, stabilizzarsi nell'intorno del guadagno a regime (2% - 5% di scostamento da K)

Autovalori e risposta al gradino

Teorema Fondamentale dell'Algebra

Radici di un Polinomio

Sia dato un polinomio in x di grado n a coefficienti **reali**:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Allora le sue radici saranno tutte **reali** o **complesse e coniugate**.

Gli autovalori della matrice A saranno pertanto **reali** o **complessi e coniugati**

Autovalori della matrice di stato

Autovalori di A

Gli autovalori della matrice di stato A sono detti **modi del sistema** o **frequenze naturali**

Essi “codificano” il comportamento dinamico del sistema

Autovalori Reali

Ogni **autovalore reale** λ_n contribuisce, nella risposta nel tempo, con un **termine esponenziale** del tipo

$$e^{\lambda_n t}$$

- Se $\lambda_n > 0$, il termine **diverge a ∞**
- Se $\lambda_n = 0$, il termine **resta costante**
- Se $\lambda_n < 0$, il termine **converge a 0**

Relazioni tra Autovalori Reali

Siano $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ due autovalori reali, allora la risposta sarà del tipo:

$$e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}$$

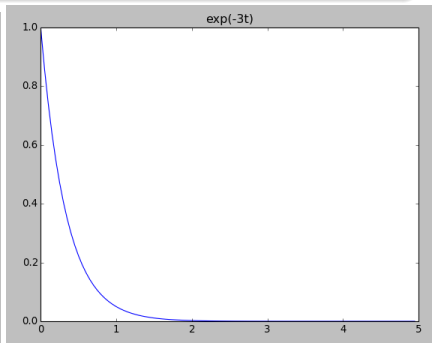
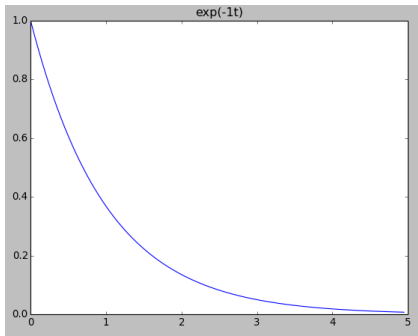
Sia λ_1 **più vicino allo zero** rispetto a λ_2 , allora il termine $e^{\lambda_1 t}$ sarà **più lento** del termine $e^{\lambda_2 t}$

Autovalori della matrice di stato

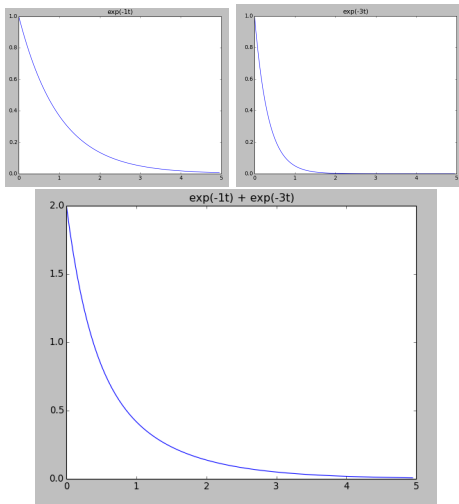
Esempio

Siano $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$, allora la risposta sarà del tipo:

$$e^{-t} + e^{-3t}$$



Autovalori della matrice di stato



La risposta complessiva è maggiormente influenzata dall'autovalore più piccolo in valore assoluto (più lento)

Autovalori Complessi e Coniugati

Ogni coppia di **autovalori complessi e coniugati** $\sigma_n + i\omega_n$ contribuisce, nella risposta nel tempo, con un **termine esponenziale + oscillazione** del tipo

$$e^{\sigma_n t} \sin \omega_n t$$

- Se $\sigma_n > 0$, il termine **diverge a ∞**
- Se $\sigma_n = 0$, il termine **resta confinato in un intorno dello zero**
- Se $\sigma_n < 0$, il termine **converge a 0**

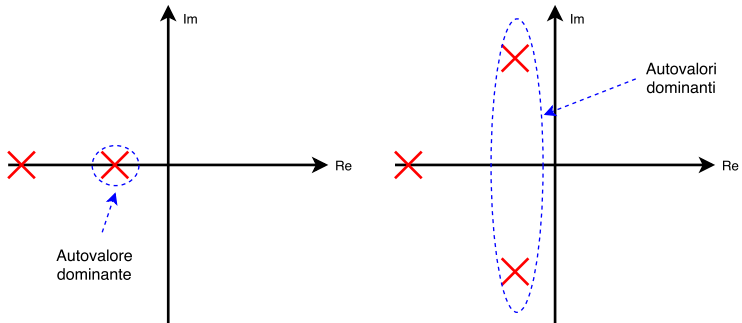
Autovalori dominanti

Autovalori Dominanti

Gli autovalori vengono comunemente rappresentati nel **piano complesso**

Si definiscono **autovalori dominanti** gli autovalori più vicini all'asse immaginario

Essi sono quelli che danno il **maggior contributo** nella dinamica del sistema



Autovalori e Durata Transitorio

La parte reale degli autovalori $Re(\lambda_i)$ è presente nel termine esponenziale della risposta del sistema:

$$e^{\lambda_i t}$$

Da punto di vista dimensionare esso è una **frequenza** e la sua unità di misura è:

$$Hz = s^{-1} = \frac{1}{s}$$

L'inverso di un autovalore $T_i = \frac{1}{\lambda_i}$ è detto **costante di tempo**.

Se il sistema è **asintoticamente stabile**, la **durata del transitorio** è (circa) **3 volte l'inverso del valore assoluto dell'autovalore dominante λ^*** :

$$durata\ transitorio \simeq \frac{3}{|\lambda^*|}$$

Segnali Canonici e Risposta di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici