

Controllori PI: Uso e Sensitività delle Costanti di Controllo

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

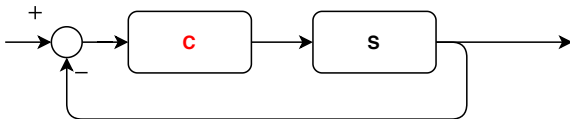
santoro@dmf.unict.it



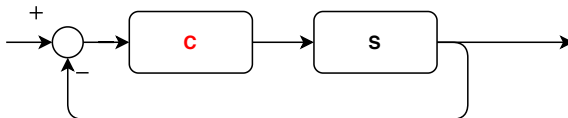
Programmazione Sistemi Robotici

Controllori e Comportamento

- I sistemi di controllo permettono di far sì che un sistema S si comporti in un modo ben preciso
- Questo obiettivo viene raggiunto attraverso un feedback loop in cui si aggiunge un ulteriore sistema dinamico artificiale C
- La presenza del feedback e del controllore C fa sì che gli autovalori $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ del sistema finale siano **differenti** dagli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ del sistema originario S
- Attraverso la progettazione del controllore C è dunque possibile al sistema una **dinamica ben precisa**



- I controllori di tipo **proporzionale-integrale** permettono di “modulare” il comportamento complessivo attraverso la scelta opportuna delle costanti K_P e K_I
- Gli autovalori $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ del sistema finale pertanto si “sposteranno” opportunamente al variare delle costanti di controllo
- Ma in che modo essi variano e in che modo possiamo capire come modificare le costanti per ottenere il comportamento desiderato?



Sistema del Primo Ordine Controllo P

Sistema Primo Ordine e Controllo P

- Consideriamo il caso di un sistema del primo ordine e di un semplice controllo proporzionale:

$$\dot{y} = ay + bu$$

- Questo sistema presenta un unico autovalore pari a a , pertanto il sistema risulta asintoticamente stabile se $a < 0$
- Se utilizziamo un controllore P, il polinomio caratteristico del sistema complessivo diventa¹:

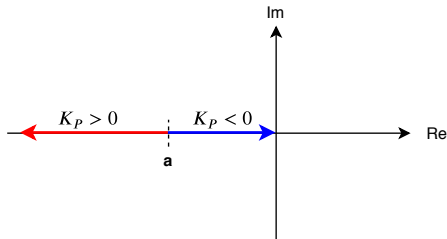
$$\lambda + (K_P b - a)$$

- Esso presenta un unico autovalore pari a $a - K_P b$

¹Come lo abbiamo ottenuto??

Sistema Primo Ordine e Controllo P

- Il sistema con feedback proporzionale presenta un unico autovalore pari a $\lambda' = a - K_p b$
- Esso risulta dunque **asintoticamente stabile** solo se $K_p > \frac{a}{b}$
- Poichè $a < 0$, se tracciamo l'andamento della posizione dell'autovalore λ' nel piano complesso otteniamo:



- Il sistema complessivo diventa **sempre più veloce** man mano che K_p cresce
- Per $K_p < 0$ la dinamica del sistema via via rallenta fino a raggiungere l'instabilità

Sistema del Secondo Ordine Controllo P

- Consideriamo il caso di un sistema del secondo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bx_2 + u \end{cases}$$

- La matrice di stato è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

- Per $a \geq -\frac{b^2}{4}$ abbiamo due **autovalori reali**
- Per $a < -\frac{b^2}{4}$ abbiamo due **complessi e coniugati**

- Consideriamo il caso di un sistema del secondo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bx_2 + u \end{cases}$$

- La matrice di stato è:

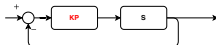
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

- Per $a \geq -\frac{b^2}{4}$ abbiamo due **autovalori reali**
- Per $a < -\frac{b^2}{4}$ abbiamo due **complessi e coniugati**

Sistema Secondo Ordine e Controllo P



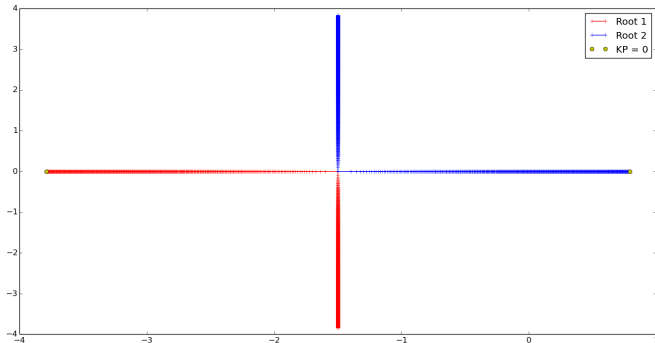
- Consideriamo il caso $a \geq -\frac{b^2}{4}$, pertanto il sistema originale S ha due **autovalori reali**
- Calcoliamo gli autovalori del sistema con feedback:

$$\lambda'_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(K_P - a)}}{2}$$

e tracciamo il loro “movimento” nel piano complesso al variare di $K_P > 0$:

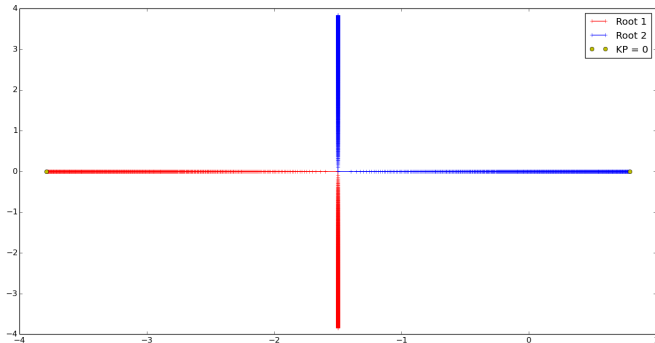
Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Consideriamo $b = -3$ e $a = 3$, dunque per $K_P = 0$ abbiamo $\lambda'_1 \simeq 0.8$, $\lambda'_2 \simeq -3.8$ (pallini gialli), il sistema è instabile



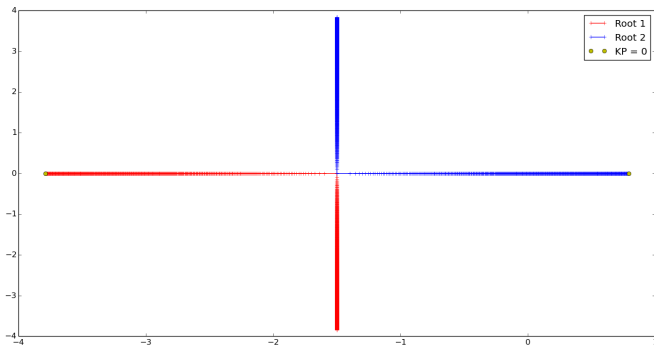
Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Al crescere di K_P gli autovalori vanno “avvicinandosi tra loro” e, a un certo punto, il sistema diventa **asintoticamente stabile**



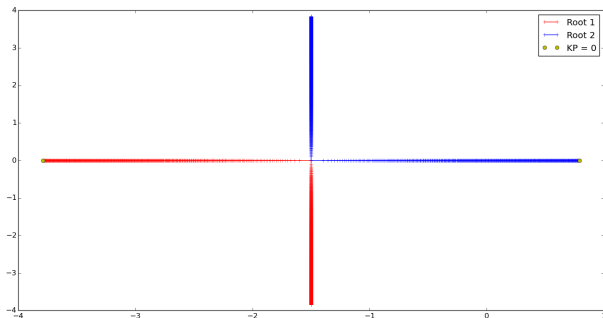
Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Al crescere di K_P , l'autovalore dominante (quello più a destra) **aumenta in valore assoluto** $\Rightarrow$ il sistema diventa via via **più veloce**



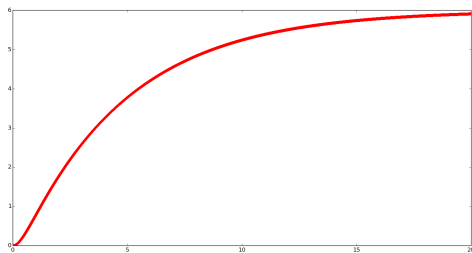
Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Al crescere di K_P , a un certo punto gli autovalori diventano **complessi e coniugati** $\Rightarrow$ il sistema ha comportamento **oscillatorio smorzato**
- In questo caso, al crescere di K_P varia solo la **parte immaginaria** $\Rightarrow$ nel sistema varia solo la **sovraelongazione** e il **periodo delle oscillazioni**

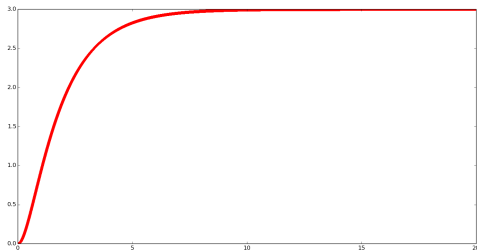


Sistema Secondo Ordine e Controllo P

$$K_P = 3.6$$

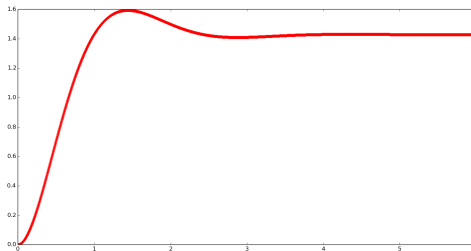


$$K_P = 4.5$$

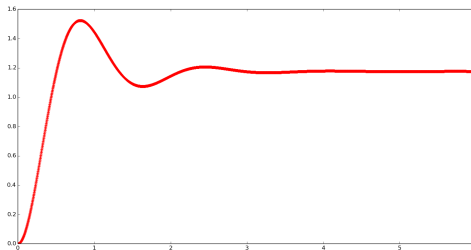


Sistema Secondo Ordine e Controllo P

$K_P = 10$

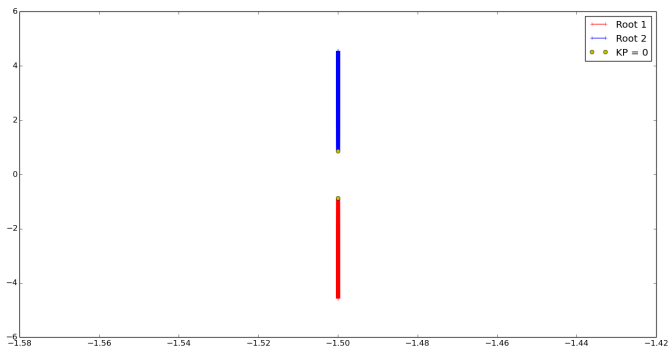


$K_P = 20$



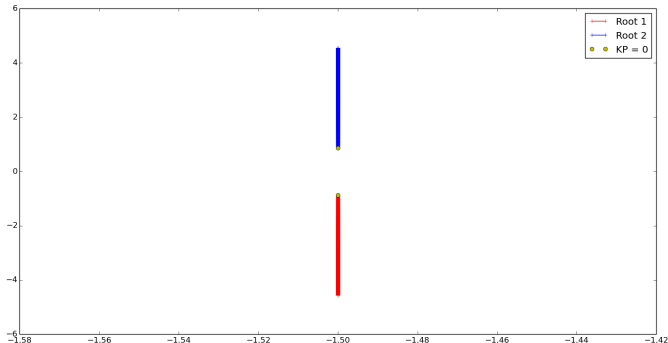
Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Consideriamo $b = -3$ e $a = -3$, dunque per $K_P = 0$ abbiamo $\lambda'_{1,2} = -1.5 \pm 0.87i$ (pallini gialli), il sistema è **asintoticamente stabile** con comportamento **oscillatorio smorzato**



Sistema Secondo Ordine e Controllo P

- Anche in questo caso, al crescere di K_P varia solo la **parte immaginaria** $\Rightarrow$ nel sistema varia solo la **sovraelongazione** e il **periodo delle oscillazioni**



Sistema del Primo Ordine Controllo PI

Sistema Primo Ordine e Controllo PI

- Consideriamo il caso di un sistema del primo ordine e di un semplice controllo proporzionale:

$$\dot{y} = ay + bu$$

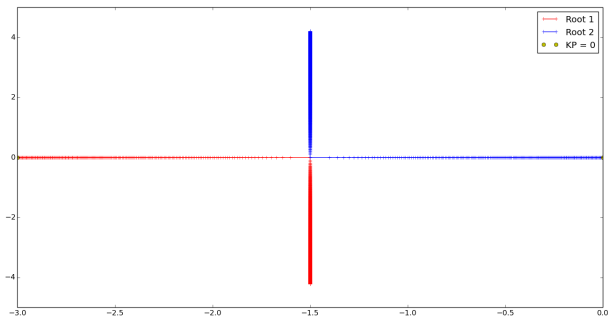
- Questo sistema presenta un unico autovalore pari a a , pertanto il sistema risulta asintoticamente stabile se $a < 0$
- Se utilizziamo un **controllore PI**, il sistema con feedback ottenuto presenta i seguenti autovalori (validi per $K_I \neq 0$):

$$\lambda'_{1,2} = \frac{-(K_P b - a) \pm \sqrt{(K_P b - a)^2 - 4K_I}}{2}$$

- Poichè i parametri sono due K_P, K_I , studiamone il contributo uno per volta

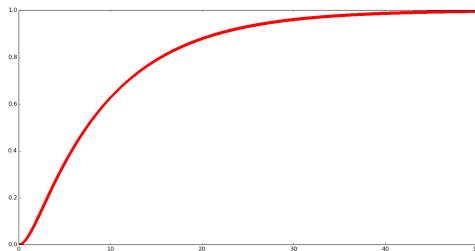
Sistema Primo Ordine e Controllo PI

- Fissiamo $K_p = 0$ e facciamo variare solo K_I
- Al crescere di K_I , gli autovalori si “avvicinano”, indicando che il sistema diventa via via più veloce
- Quindi diventano **complessi e coniugati**: il comportamento passa da **esponenziale semplice** a **oscillatorio smorzato**
- Al crescere di K_I varia solo la **parte immaginaria** $\Rightarrow$ nel sistema varia solo la **sovraelongazione** e il **periodo delle oscillazioni**

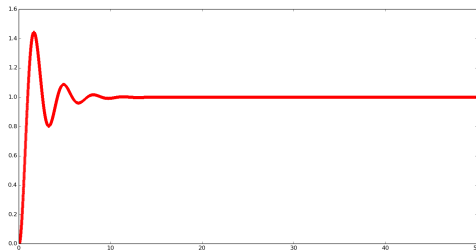


Sistema Primo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 0, K_I = 0.1$$

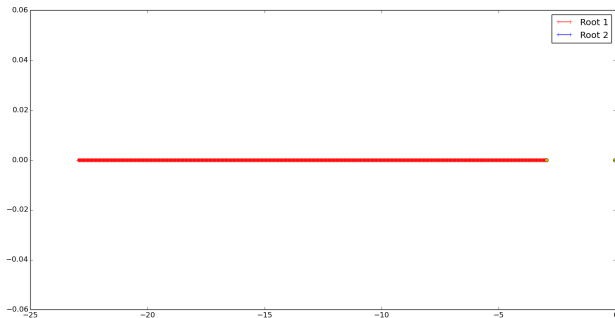


$$K_P = 0, K_I = 4$$



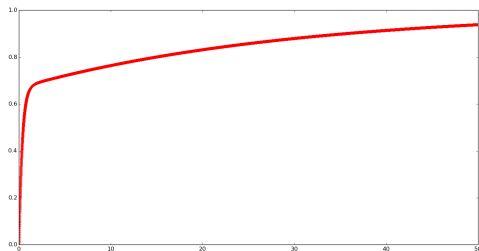
Sistema Primo Ordine e Controllo PI

- Fissiamo $K_I = 0.1$ e facciamo variare K_P
- Al crescere di K_P , un autovalore rimane confinato nell'intorno dell'origine (autovalore dominante) mentre l'altro si muove velocemente verso $-\infty$
- La dinamica del sistema non cambia sensibilmente, se non nei primi istanti dove il contributo di K_P diventa **preponderante**

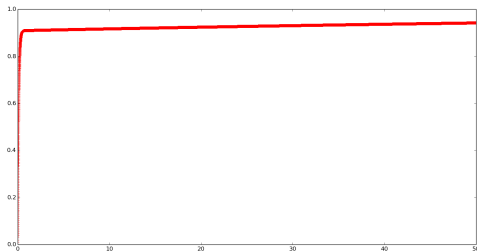


Sistema Primo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 2, K_I = 0.1$$



$$K_P = 10, K_I = 0.1$$



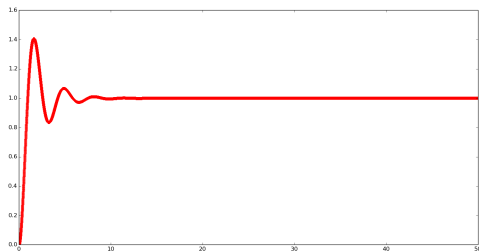
Sistema Primo Ordine e Controllo PI

- Fissiamo $K_I = 4$ e facciamo variare K_P
- Al crescere di K_P , gli autovalore (inizialmente complessi e coniugati) si avvicinano all'asse reale, fino a diventare reali
- La sovraelongazione e le oscillazioni vengono via via “tagliate” fino a scomparire del tutto

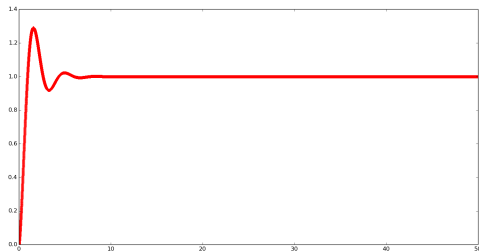


Sistema Primo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 0.1, K_I = 4$$

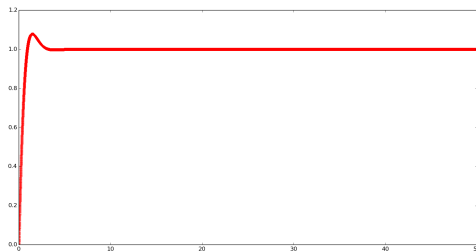


$$K_P = 0.5, K_I = 4$$



Sistema Primo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 2, K_I = 4$$



$$K_P = 5, K_I = 4$$



Sistema del Secondo Ordine Controllo PI

- Consideriamo il caso di un sistema del secondo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_1 + bx_2 + u \end{cases}$$

- La matrice di stato è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono:

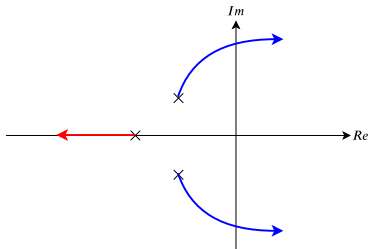
$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

- Gli autovalori del sistema con feedback PI sono dati dalle radici del polinomio:

$$\lambda^3 - b\lambda^2 + (K_P - a)\lambda + K_I$$

Sistema Secondo Ordine e Controllo PI

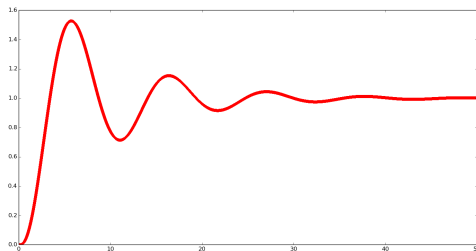
- Fissiamo $a = -1$, $b = -3$, $K_P = 0$ e facciamo variare K_I
- Poichè vi sono tre autovalori, l'andamento di essi al variare di K_I sarà del tipo:



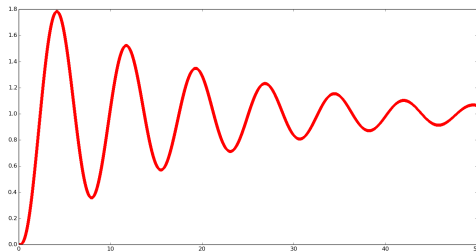
- Come mostra la figura, al crescere di K_I il sistema **rallenta**, e **crescono le oscillazioni** fino all'**instabilità**

Sistema Secondo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 0, K_I = 1$$

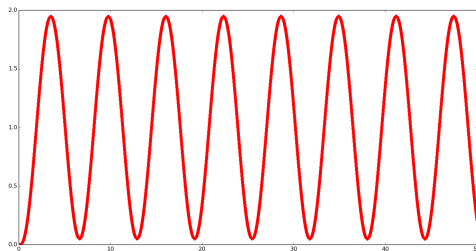


$$K_P = 0, K_I = 2$$

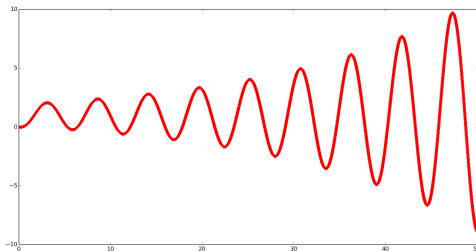


Sistema Secondo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 0, K_I = 3$$



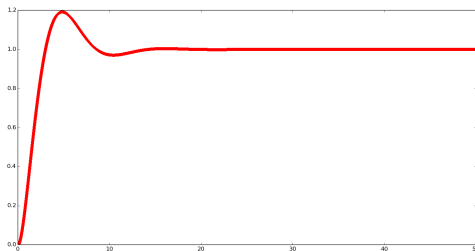
$$K_P = 0, K_I = 4$$



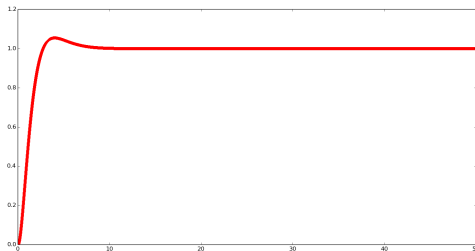
- Fissato $K_I = 1$, facciamo variare K_P
- Il contributo di K_P permette di rendere il sistema più veloce e anche “tagliare” la sovraengolazione, la quale tuttavia non riesce mai a sparire del tutto
- Per valori di K_P crescenti compare anche una **sottoelongazione**

Sistema Secondo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 1, K_I = 1$$



$$K_P = 2, K_I = 1$$

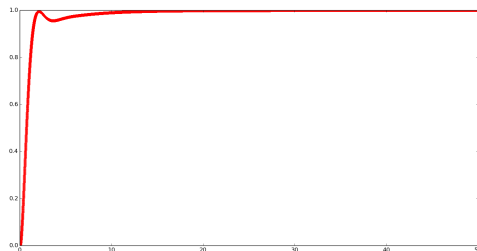


Sistema Secondo Ordine e Controllo PI

$$K_P = 3, K_I = 1$$



$$K_P = 4, K_I = 1$$



Comportamento a ciclo chiuso all'aumentare del parametro

Sistema	Controllore P	Controllore PI	
	K_P	K_P	K_I
Primo Ordine	Sistema più veloce	Taglia la sovraelong.	Sistema più veloce
Secondo Ordine	Sistema più veloce fino all'innesco delle oscillazioni	Riduce la sovraelong. Rischio di sottoelong.	Sistema più lento

Controllori PI: Uso e Sensitività delle Costanti di Controllo

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici