

Cinematica diretta e inversa di un manipolatore

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

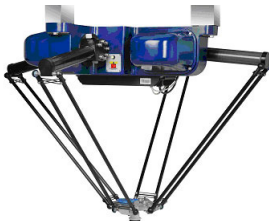
santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

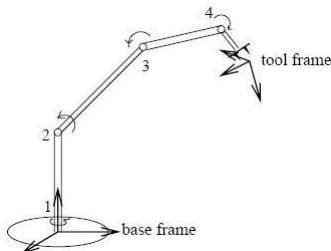
Manipolatore Robotico

- Un **manipolatore** è un sistema robotico costituito da un insieme di **bracci** connessi da opportuni **giunti di movimento**
- Un manipolatore è detto:
 - **seriale** (foto a sinistra) se i giunti sono connessi in cascata (e quindi dipendono l'uno dall'altro in serie)
 - **parallelo** (foto al centro) se i giunti sono indipendenti
- Ad un manipolatore è in genere collegato un **end-effector** (foto a destra), cioè l'**utensile** necessario per effettuare il tipo specifico di manipolazione (pinza, fresa, spruzzatore, ventosa, etc.)



Spazio e Sistemi di Riferimento

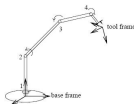
- Ogni manipolatore robotico presenta **tre** sistemi di riferimento:
 - il sistema **solidale con la base** (**base frame**), di tipo **cartesiano**
 - il sistema **solidale con l'end-effector** (**tool frame**), di tipo **cartesiano**
 - il sistema delle **variabili di giunto**, non cartesiano; esse rappresentano la **posizione di ogni giunto** del manipolatore; nel caso in figura, le variabili di giunto sono gli **angoli 1, 2, 3 e 4** che ogni braccio forma con il successivo



Spazio e Sistemi di Riferimento

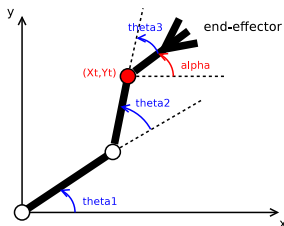
- Lo **spazio di giunto** è quello che noi possiamo controllare (possiamo impostare le posizioni degli angoli di ogni giunto)
- Lo **spazio della base** (base frame) è invece il sistema di riferimento di “lavoro” del manipolatore
- Il controllo di un manipolatore implica dunque trovare i valori delle **variabili di giunto** che permettono all'end-effector di raggiungere una posizione specificata nel **base frame**
- In altre parole, dette:
 - $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ le variabili di giunto
 - e $\{x, y, z, \theta, \phi, \psi\}$ la **posa** del manipolatore, in termini di posizione $\{x, y, z\}$ dell'end-effector nel base frame e rotazione $\{\theta, \phi, \psi\}$ rispetto al base frame
- il problema è trovare la trasformazione $T()$

$$\{q_1, q_2, \dots, q_n\} = T(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$$



Esempio in 2D

- Il manipolatore in figura è detto **manipolatore planare**, perchè il suo base frame è in due dimensioni (un piano)
- L'esempio mostra **tre giunti, due bracci** e un **end-effector**
- La **posa** dell'end-effector $\{X_t, Y_t, \alpha\}$ è rappresentata dalla posizione $\{X_t, Y_t\}$ del suo giunto e dall'angolo α formato con l'asse x
- Le **variabili di giunto** sono gli **angoli** che ogni braccio forma con il successivo $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$



Problema Cinematico Diretto e Inverso

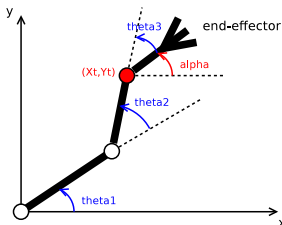
- **Cinematica Diretta:** data la posizione nello spazio dei giunti $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, trovare la trasformazione T_D tale che:

$$\{X_t, Y_t, \alpha\} = T_D(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

- **Cinematica Inversa:** data la posa nel base frame $\{X_t, Y_t, \alpha\}$, trovare la trasformazione T_I tale che:

$$\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} = T_I(X_t, Y_t, \alpha)$$

- Entrambi i problemi si affrontano applicando le formule delle **roto-traslazioni**

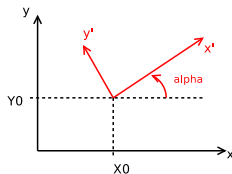


Roto-traslazioni in 2D

- Siano dati il sistema di riferimento XOY e il sistema di riferimento $X'O'Y'$ **traslato** (rispetto a XOY) sul punto (X_0, Y_0) e **ruotato** (rispetto a XOY) di un angolo α
- Dato un punto (x', y') definito in $X'O'Y'$, le sue coordinate in XOY saranno date da:

$$x = X_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

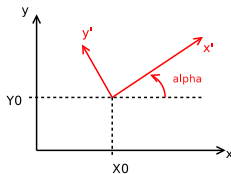
$$y = Y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$



Roto-traslazioni in 2D

- Siano dati il sistema di riferimento XOY e il sistema di riferimento $X'O'Y'$ **traslato** (rispetto a XOY) sul punto (X_0, Y_0) e **ruotato** (rispetto a XOY) di un angolo α
- Se adottiamo un sistema di **coordinate omogenee**, la trasformazione può essere rappresentata dalla seguente equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & X_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$



Roto-traslazioni in 2D

- La matrice:

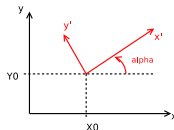
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & X_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- è la **matrice di rototraslazione** composta
- dalla **matrice di rotazione**:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- e dal **vettore di traslazione**:

$$T = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$



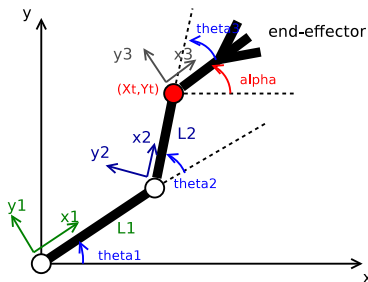
- Ogni **giunto** implica una **rototraslazione** dove:
 - La **rotazione** si basa sulle caratteristiche cinetiche del giunto
 - La **traslazione** è data dalla lunghezza del braccio
- Ogni giunto i definisce una matrice di rototraslazione ${}^{i-1}_i A$ che permette il passaggio dal sistema di riferimento $i - 1$ al sistema di riferimento i
- La matrice ${}^b_t A$ che permette il passaggio dal base frame al tool frame è dunque data dal **prodotto** delle varie matrici di giunto

$${}^b_t A = {}^b_1 A {}^1_2 A {}^2_3 A \dots {}^{i-1}_i A$$

Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- Consideriamo il manipolatore planare in figura, costituito da **tre giunti** di rotazione
- Il passaggio da base frame a sistema (x_1, y_1) è basato su una semplice rotazione

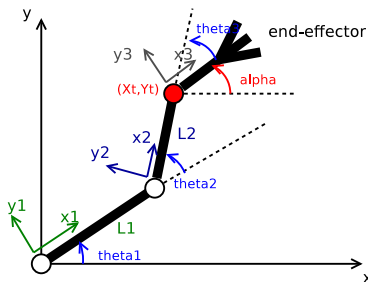
$${}^b_1A = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- Il passaggio da sistema (x_1, y_1) a sistema (x_2, y_2) è basato su una rotazione θ_2 e una traslazione L_1 lungo l'asse x_1 , dove L_1 è la lunghezza del primo braccio:

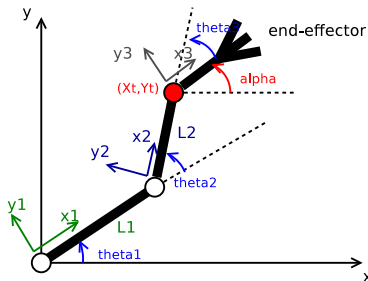
$${}^1_2A = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- Il passaggio da sistema (x_2, y_2) a sistema (x_3, y_3) (tool frame) è basato su una rotazione θ_3 e una traslazione L_2 lungo l'asse x_2 , dove L_2 è la lunghezza del secondo braccio:

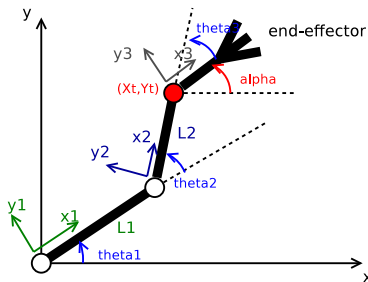
$${}^2_t A = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & L_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- La trasformazione completa si esprime con il prodotto delle tre matrici:

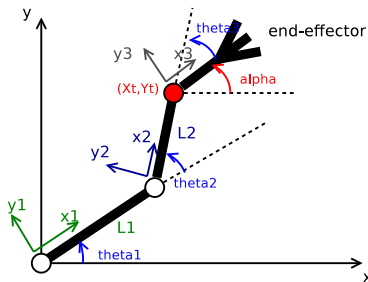
$${}^b_1A {}^1_2A {}^2_tA = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- Se tuttavia consideriamo la **trasformazione diretta** da sistema (x, y) a (x_3, y_3) , avremo:

$${}^b_tA = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & X_t \\ \sin \alpha & \cos \alpha & Y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



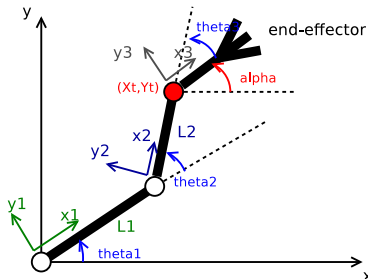
Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- A questo punto abbiamo le due rappresentazioni:

$${}^b_1A {}^1_2A {}^2_tA = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^b_tA = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & X_t \\ \sin \alpha & \cos \alpha & Y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dalle quali ricaviamo le equazioni **finali** della cinematica diretta



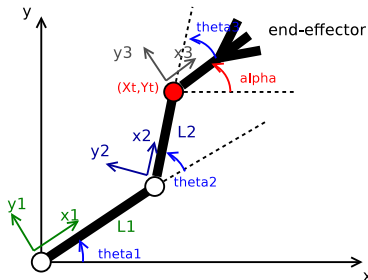
Cinematica Diretta di un Manipolatore Planare

- Equazioni finali:

$$X_t = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$Y_t = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$



Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- La **cinematica inversa** implica l'inversione delle equazioni:

$$X_t = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$Y_t = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

- al fine di determinare θ_1 , θ_2 e θ_3 a partire da X_t , Y_t e α
- Per brevità poniamo
 $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- Abbiamo:

$$X_t = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

$$Y_t = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

- Eleviamo al quadrato le prime due equazioni:

$$X_t^2 = L_1^2 c_1^2 + L_2^2 c_{12}^2 + 2L_1 L_2 c_1 c_{12}$$

$$Y_t^2 = L_1^2 s_1^2 + L_2^2 s_{12}^2 + 2L_1 L_2 s_1 s_{12}$$

- Sommiamo membro a membro:

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 c_1^2 + L_2^2 c_{12}^2 + 2L_1 L_2 c_1 c_{12} + L_1^2 s_1^2 + L_2^2 s_{12}^2 + 2L_1 L_2 s_1 s_{12}$$

- poichè:

$$c_1^2 + s_1^2 = 1$$

$$c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1$$

Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- Otteniamo:

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_1c_{12} + 2L_1L_2s_1s_{12}$$

- Applichiamo le formule di somma:

$$c_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = c_1c_2 - s_1s_2$$

$$s_{12} = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = s_1c_2 + c_1s_2$$

- Otteniamo:

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_1(c_1c_2 - s_1s_2) + 2L_1L_2s_1(s_1c_2 + c_1s_2)$$

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_1^2c_2 - 2L_1L_2c_1s_1s_2 + 2L_1L_2s_1^2c_2 + 2L_1L_2s_1c_1s_2$$

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_1^2c_2 + 2L_1L_2s_1^2c_2$$

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2(c_1^2 + s_1^2)c_2$$

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_2$$

Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- abbiamo:

$$X_t^2 + Y_t^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_2$$

- Risolvendo rispetto a c_2 :

$$\cos \theta_2 = \frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

- E poichè:

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}$$

- otteniamo:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)^2}, \frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)$$

dove $\text{atan2}(a, b) = \arctan \frac{a}{b}$ calcolata sui quattro quadranti.

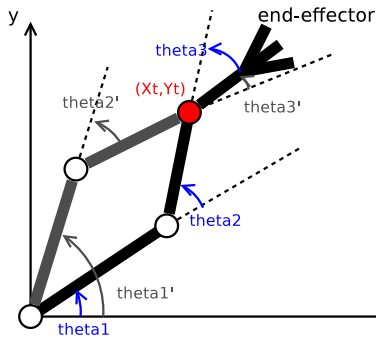
Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- La soluzione:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)^2}, \frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)$$

implica due possibili soluzioni per l'angolo θ_2

- In effetti, come si nota dalla figura, la **stessa posa** può essere ottenuta tramite **due possibili configurazioni** degli angoli $\theta_1, \theta_2, \theta_3$



Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- Per calcolare θ_1 consideriamo:

$$X_t = L_1 c_1 + L_2 c_{12}$$

$$Y_t = L_1 s_1 + L_2 s_{12}$$

- Applichiamo le formule di somma:

$$X_t = L_1 c_1 + L_2(c_1 c_2 - s_1 s_2)$$

$$Y_t = L_1 s_1 + L_2(s_1 c_2 + s_2 c_1)$$

$$X_t = L_1 c_1 + L_2 c_1 c_2 - L_2 s_1 s_2$$

$$Y_t = L_1 s_1 + L_2 s_1 c_2 + L_2 s_2 c_1$$

$$X_t = (L_1 + L_2 c_2) c_1 - (L_2 s_2) s_1$$

$$Y_t = (L_1 + L_2 c_2) s_1 + (L_2 s_2) c_1$$

Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- Notiamo che le relazioni ottenute:

$$X_t = (L_1 + L_2 c_2) c_1 - (L_2 s_2) s_1$$

$$Y_t = (L_1 + L_2 c_2) s_1 + (L_2 s_2) c_1$$

rappresentano una **rotazione del punto di coordinate** $(L_1 + L_2 c_2, L_2 s_2)$ di un angolo θ_1 ;

- posto $X^* = L_1 + L_2 c_2$, $Y^* = L_2 s_2$, otteniamo:

$$X_t = X^* c_1 - Y^* s_1$$

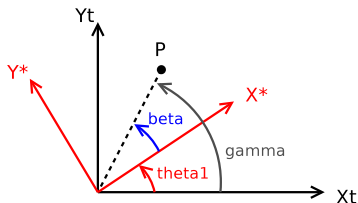
$$Y_t = X^* s_1 + Y^* c_1$$

Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- per determinare θ_1 , rappresentiamo graficamente il modello delle equazioni:

$$X_t = X^* c_1 - Y^* s_1$$

$$Y_t = X^* s_1 + Y^* c_1$$



- abbiamo:

$$\beta = \text{atan2}(Y^*, X^*) \quad \gamma = \text{atan2}(Y_t, X_t) \quad \theta_1 = \gamma - \beta$$

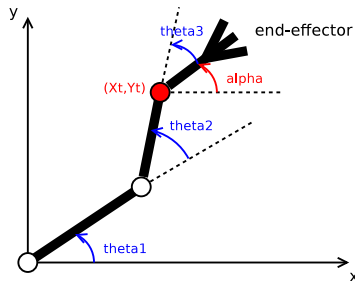
Cinematica Inversa di un Manipolatore Planare

- Otteniamo pertanto le soluzioni finali:

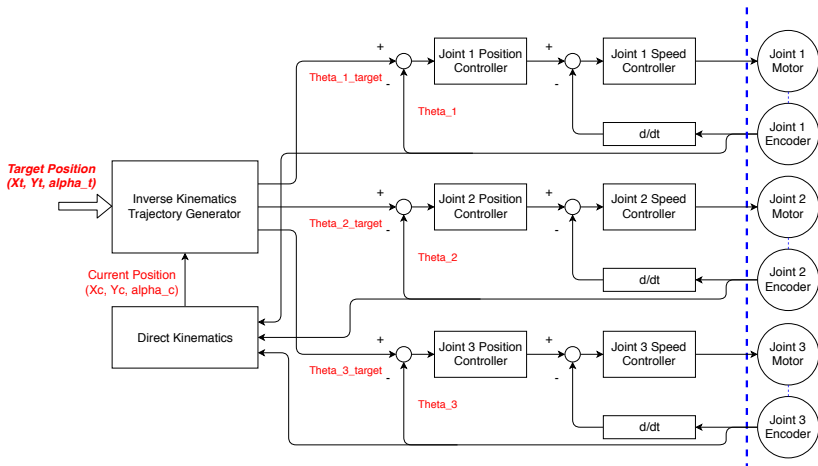
$$\theta_2 = \operatorname{atan2} \left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)^2}, \frac{X_t^2 + Y_t^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \right)$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(Y_t, X_t) - \operatorname{atan2}(L_2 \sin \theta_2, L_1 + L_2 \cos \theta_2)$$

$$\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2$$



Schema del Sistema di Controllo del Manipolatore



Manipulator

while *True* **do**

On each ΔT ;

// Kinematics

$\Delta\theta_1 \leftarrow \text{read_joint_1}(); \theta_1 \leftarrow \theta_1 + \Delta\theta_1; \dot{\theta}_1 \leftarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta T};$

$\Delta\theta_2 \leftarrow \text{read_joint_2}(); \theta_2 \leftarrow \theta_2 + \Delta\theta_2; \dot{\theta}_2 \leftarrow \frac{\Delta\theta_2}{\Delta T};$

$\Delta\theta_3 \leftarrow \text{read_joint_3}(); \theta_3 \leftarrow \theta_3 + \Delta\theta_3; \dot{\theta}_3 \leftarrow \frac{\Delta\theta_3}{\Delta T};$

$\{X_c, Y_c, \alpha_c\} \leftarrow \text{direct_kinematics}(\theta_1, \theta_2, \theta_3);$

// Control

$\{\theta_1^t, \theta_2^t, \theta_3^t\} \leftarrow \text{inverse_kinematics}(\{X_t, Y_t, \alpha_t\}, \{X_c, Y_c, \alpha_c\});$

...

end

Manipulator

while *True* **do**

On each ΔT ;

// Kinematics

...

// Control

$\{\theta_1^t, \theta_2^t, \theta_3^t\} \leftarrow \text{inverse_kinematics}(\{X_t, Y_t, \alpha_t\}, \{X_c, Y_c, \alpha_c\});$

$\dot{\theta}_1^t \leftarrow \text{joint_1_position_controller}(\theta_1^t - \theta_1);$

$\dot{\theta}_2^t \leftarrow \text{joint_2_position_controller}(\theta_2^t - \theta_2);$

$\dot{\theta}_3^t \leftarrow \text{joint_3_position_controller}(\theta_3^t - \theta_3);$

$PWM_1 \leftarrow \text{joint_1_speed_controller}(\dot{\theta}_1^t - \dot{\theta}_1);$

$PWM_2 \leftarrow \text{joint_2_speed_controller}(\dot{\theta}_2^t - \dot{\theta}_2);$

$PWM_3 \leftarrow \text{joint_3_speed_controller}(\dot{\theta}_3^t - \dot{\theta}_3);$

// Drive

$\text{drive_joints}(PWM_1, PWM_2, PWM_3);$

end

Cinematica diretta e inversa di un manipolatore

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici