

Discretizzazione di un sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Discretizzazione di un sistema

- L'operazione di discretizzazione implica “campionare” tutti i segnali con un intervallo di tempo prefissato ΔT
- La derivata diventa **rapporto incrementale** (approssimazione del primo ordine)

$$x(t), t \in \mathcal{R} \Rightarrow x(k\Delta T), k \in \mathcal{N}$$

$$\dot{x}(t), t \in \mathcal{R} \Rightarrow \frac{x((k+1)\Delta T) - x(k\Delta T)}{\Delta T}, k \in \mathcal{N}$$

$$x(t) \Rightarrow x(k)$$

$$\dot{x}(t) \Rightarrow \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta T}$$

Discretizzazione di un sistema

Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

discretizzato con tempo di campionamento T diventa:

$$\begin{cases} \frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta T} &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) - x(k) &= A\Delta T x(k) + B\Delta T u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) &= (A\Delta T + I)x(k) + B\Delta T u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Discretizzazione di un sistema

Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

discretizzato con tempo di campionamento T diventa:

$$\begin{cases} x(k+1) &= A'x(k) + B'u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

dove:

$$\begin{aligned} A' &= A\Delta T + I \\ B' &= B\Delta T \end{aligned}$$

Sebbene la forma analitica sia diversa, i **due sistemi sono equivalenti**

In un sistema discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = A'x(k) + B'u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

scompare l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione dello stato nel *tempo*

Essa è sostituita dalla **equazione alle differenze**:

$$x(k+1) = A'x(k) + B'u(k)$$

che indica qual è il valore che assumerà lo stato al *successivo istante di campionamento* (**legge di aggiornamento dello stato**)

Consideriamo il sistema “massa”: $\begin{cases} \dot{v} = -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} = v \end{cases}$

Applichiamo l'approssimazione con il rapporto incrementale:

$$\begin{cases} \frac{v(k+1)-v(k)}{\Delta T} = -\frac{b}{M}v(k) + \frac{1}{M}f(k) \\ \frac{p(k+1)-p(k)}{\Delta T} = v(k) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} v(k+1) = (1 - \frac{b\Delta T}{M})v(k) + \frac{\Delta T}{M}f(k) \\ p(k+1) = p(k) + v(k)\Delta T \end{cases}$$

Esempio: Pendolo

Consideriamo il sistema “pendolo: $\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -g\theta - \frac{b}{M}\omega + \frac{1}{M}f \end{cases}$

Applichiamo l'approssimazione con il rapporto incrementale:

$$\begin{cases} \frac{\theta(k+1)-\theta(k)}{\Delta T} = \omega(k) \\ \frac{\omega(k+1)-\omega(k)}{\Delta T} = -g\theta(k) - \frac{b}{M}\omega(k) + \frac{1}{M}f(k) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + \omega(k)\Delta T \\ \omega(k+1) = (1 - \frac{b\Delta T}{M})\omega(k) - g\Delta T\theta(k) + \frac{\Delta T}{M}f(k) \end{cases}$$

Discretizzazione di un sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici