

Cinematica e Controllo di un robot mobile

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

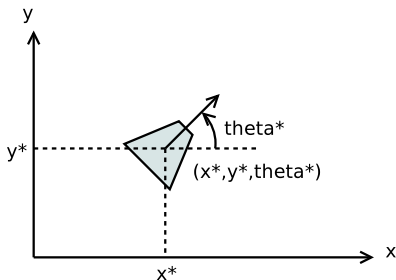
Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



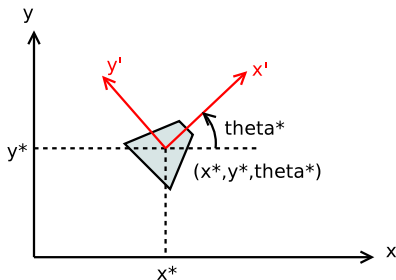
Programmazione Sistemi Robotici

Cinematica di Robot Mobile su Ruote



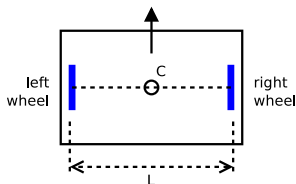
- La **posa** istantanea di un robot su un ambiente **bidimensionale** è caratterizzata da:
 - Posizione x
 - Posizione y
 - Orientamento θ (rispetto all'asse x)

Cinematica di Robot Mobile su Ruote



- Si considerano due sistemi di riferimento:
 - **Body system**, sistema di riferimento *locale* del robot (x', y')
 - **Earth system**, sistema di riferimento *globale* dell'ambiente (x, y)
- La trasformazione tra un sistema e l'altro avviene usando le normali formule di roto-traslazione

Modello di Robot Mobile a due ruote indipendenti



- Due ruote indipendenti poste ai lati del robot
- Il punto **C** è detto **centro di istantanea rotazione** ed è il riferimento per la posizione globale del robot
- I parametri di geometria per il modello cinematico sono:
 - r_L , raggio della ruota sinistra
 - r_R , raggio della ruota destra
 - n_L , numero di tick per giro dell'encoder sinistro
 - n_R , numero di tick per giro dell'encoder destro
 - L , distanza tra i punti di contatto delle due ruote (**wheelbase**)

Cinematica del Robot Mobile a due ruote indipendenti

- Parametri:
 - r_L , raggio della ruota sinistra
 - r_R , raggio della ruota destra
 - n_L , numero di tick per giro dell'encoder sinistro
 - n_R , numero di tick per giro dell'encoder destro
 - L , distanza tra i punti di contatto delle due ruote (**wheelbase**)
- Detti $\Delta tick_L$ e $\Delta tick_R$ il numero di **tick contati**, su ruota destra e sinistra, nell'intervallo di campionamento ΔT , abbiamo:

$$\begin{aligned}\Delta d_L &= \frac{2\pi r_L}{n_L} \Delta tick_L & \Delta d_R &= \frac{2\pi r_R}{n_R} \Delta tick_R \\ \Delta theta &= \frac{\Delta d_R - \Delta d_L}{L} \\ v_L &= \frac{\Delta d_L}{\Delta T} & v_R &= \frac{\Delta d_R}{\Delta T}\end{aligned}$$

Cinematica del Robot Mobile a due ruote indipendenti

- Detti $\Delta tick_L$ e $\Delta tick_R$ il numero di **tick contati**, su ruota destra e sinistra, nell'intervallo di campionamento ΔT , abbiamo:

$$\begin{aligned}\Delta d_L &= \frac{2\pi r_L}{n_L} \Delta tick_L & \Delta d_R &= \frac{2\pi r_R}{n_R} \Delta tick_R \\ \Delta \theta &= \frac{\Delta d_R - \Delta d_L}{L} \\ v_L &= \frac{\Delta d_L}{\Delta T} & v_R &= \frac{\Delta d_R}{\Delta T}\end{aligned}$$

- Dove:
 - Δd_L , Δd_R , distanza percorsa (in ΔT) dalla ruota sinistra/destra
 - $\Delta \theta$, variazione dell'orientamento (in radianti)
 - v_L , v_R , velocità istantanea della ruota sinistra/destra

Cinematica del Robot Mobile a due ruote indipendenti

$$\begin{aligned}\Delta d_L &= \frac{2\pi r_L}{n_L} \Delta \text{tick}_L & \Delta d_R &= \frac{2\pi r_R}{n_R} \Delta \text{tick}_R \\ \Delta \theta &= \frac{\Delta d_R - \Delta d_L}{L} \\ v_L &= \frac{\Delta d_L}{\Delta T} & v_R &= \frac{\Delta d_R}{\Delta T}\end{aligned}$$

- Sulla base delle relazioni precedenti, l'aggiornamento della posa si ottiene con:

$$\begin{aligned}x &= x + \frac{\Delta d_L + \Delta d_R}{2} \cos\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ y &= y + \frac{\Delta d_L + \Delta d_R}{2} \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right) \\ \theta &= \theta + \Delta \theta\end{aligned}$$

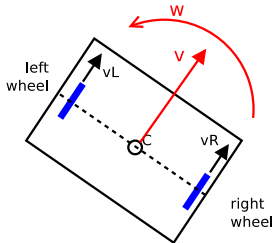
Cinematica del Robot Mobile a due ruote indipendenti

- Sulla base delle relazioni precedenti, l'aggiornamento della posa si ottiene con:

$$\begin{aligned}x &= x + \frac{\Delta d_L + \Delta d_R}{2} \cos\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\y &= y + \frac{\Delta d_L + \Delta d_R}{2} \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\\theta &= \theta + \Delta\theta\end{aligned}$$

- Le relazioni precedenti, note come **formule per l'odometria**, si determinano tramite l'**integrazione dell'equazione del moto**
- Tale integrazione (che non può essere effettuata analiticamente) è effettuata **numericamente** e pertanto contiene un **errore che si propaga in modo additivo** nella stima della posa (x, y, θ)
- La posa stimata (x, y, θ) è pertanto soggetta ad un errore non nullo e non eliminabile che cresce con l'andare del tempo/distanza percorsa

Cinematica del Robot Mobile a due ruote indipendenti

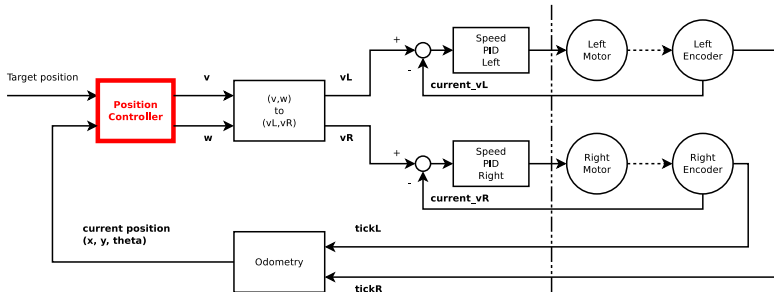


- La **velocità** è invece rappresentata secondo due possibili sistemi di riferimento
 - (v_L, v_R) , velocità istantanea delle ruote sinistra e destra
 - (v, ω) , velocità istantanea di **traslazione** e **rotazione** del punto C
- Tra i due sistemi di riferimento esiste la seguente trasformazione:

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_R + v_L}{2} & \omega &= \frac{v_R - v_L}{L} \\ v_L &= v - \frac{L\omega}{2} & v_R &= v + \frac{L\omega}{2} \end{aligned}$$

Modello di Controllo in Posizione

- Per il **controllo del moto** è opportuno utilizzare il sistema di riferimento (v, ω) , e trasformare nel sistema (v_L, v_R) i valori ottenuti.
- Stabiliti i valori target di (v_L, v_R) , ogni ruota implementa poi il controllo in velocità classico.

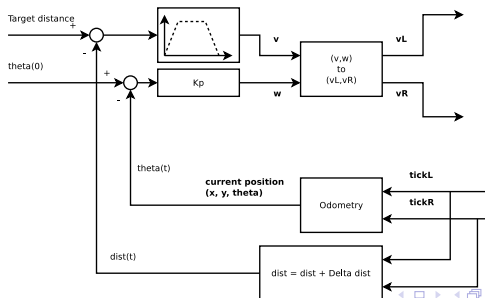


Moto su traiettoria rettilinea

- Desideriamo un controllo del moto in cui il robot percorre una certa distanza *TargetDistance* su una **traiettoria rettilinea**.
- Calcoliamo, a ogni iterazione, la distanza percorsa dall'inizio del moto come:

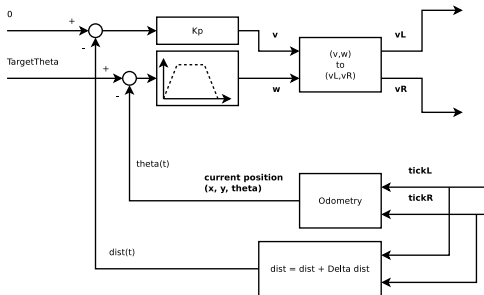
$$dist(t) = dist(t) + \frac{\Delta d_L + \Delta d_R}{2}$$

- Utilizziamo due controllori:
 - Su v , applichiamo il profilo trapezoidale di velocità, basato sull'**errore lineare** $targetDistance - dist(t)$
 - Su ω , applichiamo un controllore proporzionale, basato sull'**errore angolare** sull'orientamento iniziale $\theta(t) - \theta(0)$



Rotazione sul posto

- Desideriamo ruotare (sul posto) in modo da raggiungere un'orientamento assoluto θ_{target} .
- Utilizziamo due controllori:
 - Su ω , applichiamo il profilo trapezoidale di velocità (angolare), basato sull'**errore angolare** sull'orientamento $\theta(t) - \theta_{target}$
 - Poichè occorre non spostarsi dal punto di partenza, applichiamo un controllore proporzionale basato sull'**errore lineare** $0 - dist(t)$ (0 perchè non vogliamo spostarci dal posto)



Rotazioni, angoli e differenze

- Nell'usare gli angoli, occorre considerare che la loro aritmetica è **modulare**
- Ad esempio, i valori (in gradi) **350** e **-10** si riferiscono allo **stesso angolo**
- Tuttavia, il **diverso segno** implica un comportamento diverso del controllore che genererà velocità **positive** o **negative**
- Nel calcolo degli angoli, è pertanto opportuno **normalizzare** sempre il risultato, riconducendolo all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (risp. $[-180, 180]$)

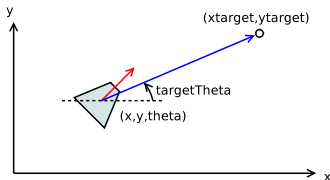
Raggiungimento di un punto

- Desideriamo raggiungere un punto specifico del piano di coordinate (x_{target}, y_{target}) .
- In ogni istante dobbiamo:
 - Percorrere la distanza (lineare) che ci separa dal punto target:

$$dist = \sqrt{(x_{robot} - x_{target})^2 + (y_{robot} - y_{target})^2}$$

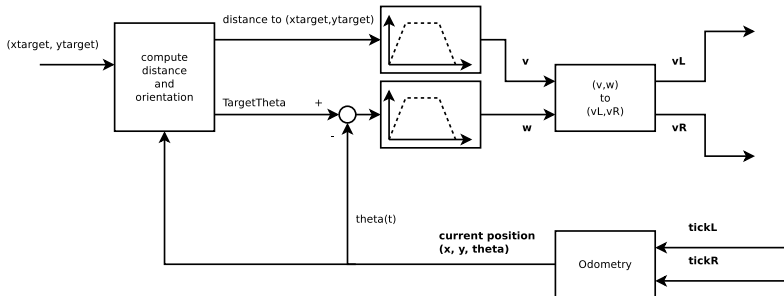
- Assicurare che l'orientamento del robot sia coerente con l'orientamento della traiettoria:

$$\theta_{trajectory} = \arctan \frac{y_{target} - y_{robot}}{x_{target} - x_{robot}}$$



Raggiungimento di un punto

- Usiamo due controllori, in entrambi i casi applichiamo il profilo trapezoidale della velocità
- Il controllore su v utilizza, come errore, proprio la **distanza** dal punto target
- Il controllore su ω utilizza, come errore, la **differenza** tra orientamento della traiettoria e orientamento del robot $\theta_{trajectory} - \theta_{robot}$



Cinematica e Controllo di un robot mobile

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici