

Equilibrio e Stabilità

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Definizione di Stato di Equilibrio

Uno stato $\bar{x} = x(T^*)$ si definisce di **equilibrio** per l'ingresso $u(t)$ se accade:

$$f(\bar{x}, u(t)) = 0, \forall t \geq T^*$$

Equilibrio e ingresso costante

Sia $\bar{x} = x(T^*)$ punto di equilibrio per l'ingresso $u(t)$, allora, detto $\bar{u} = u(T^*)$, $\bar{x}$ è **punto di equilibrio anche per l'ingresso costante $\bar{u}$** .

La ricerca dei punti di equilibrio può pertanto ridursi a considerare solo gli ingressi costanti.

Ricerca dei punti di equilibrio

In un sistema LTI (lineare tempo-invariante)

- Se la matrice A è invertibile ($|A| \neq 0$), i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione:

$$0 = Ax + B\bar{u}$$

con $\bar{u} = cost$

$$\begin{aligned} Ax &= -B\bar{u} \\ x &= -A^{-1}B\bar{u} \end{aligned}$$

- Se la matrice A non è invertibile ($|A| = 0$), vi sono o **infiniti punti** di equilibrio o **nessun punto** di equilibrio (dipende dall'ingresso $\bar{u}$)

Ricerca dei punti di equilibrio

Un sistema discreto è caratterizzato dall'equazione di stato:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

L'equilibrio (per un ingresso $\bar{u}$) implica **assenza di variazione** dello stato, pertanto:

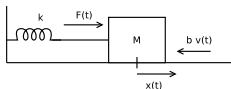
$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad 0 = (A - I)\bar{x} + B\bar{u}$$

- Se la matrice $(A - I)$ è invertibile, i punti di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione:

$$x = -(A - I)^{-1} B\bar{u}$$

- Se la matrice $(A - I)$ non è invertibile, vi sono o **infiniti punti** di equilibrio o **nessun punto** di equilibrio

Punti di Equilibrio del sistema Massa-molla



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} [F] \\ [y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} [F] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}F \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{F}{k} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Stabilità

Stabilità Semplice

Un punto di equilibrio $x_0 = x(T^*)$ si dice **stabile** quando, a seguito di una perturbazione dello stato al tempo $\bar{t} \geq T^*$, la traiettoria risultante rimane “vicino” il punto di equilibrio x_0 per ogni $t \geq \bar{t}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x(\bar{t}) : \|x(\bar{t}) - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\|x(t) - x_0\| < \epsilon, \forall t \geq \bar{t}$$

Stabilità Asintotica

Un punto di equilibrio $x_0 = x(T^*)$ si dice **asintoticamente stabile** quando, a seguito di una perturbazione dello stato al tempo $\bar{t} \geq T^*$, la traiettoria tende a x_0 per $t \rightarrow \infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x(\bar{t}) : \|x(\bar{t}) - x_0\| < \delta \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

Stabilità nei Sistemi LTI

In un sistema lineare tempo invariante, una traiettoria di stato è **stabile** quando tutte le possibili traiettorie di stato sono **stabili**. In tal caso si parla di **stabilità del sistema**.

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Criterio di Stabilità nei Sistemi LTI **continui**

Un sistema LTI è

- **asintoticamente stabile** se gli autolavori di A hanno **parte reale negativa**
- **semplicemente stabile** se gli autolavori di A hanno **parte reale negativa o nulla** e quelli con parte reale nulla sono **semplici**
- **instabile** se gli autolavori di A hanno **parte reale positiva** oppure se quelli con parte reale nulla **non sono semplici**

Gli autovalori di A sono detti **modi del sistema**

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Criterio di Stabilità nei Sistemi LTI **discreti**

Un sistema LTI è

- **asintoticamente stabile** se gli autolavori di A hanno **modulo minore di 1**
- **semplicemente stabile** se gli autolavori di A hanno **modulo minore o uguale a 1** e quelli con modulo pari a 1 sono **semplici**
- **instabile** se gli autolavori di A hanno **modulo maggiore di 1** oppure se quelli con modulo pari a 1 **non sono semplici**

Equilibrio e Stabilità

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici