

Segnali Canonici e Risposta di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it

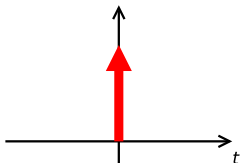


Programmazione Sistemi Robotici

Si definiscono alcuni “segnali” (input) canonici che sono quelli più spesso utilizzati per studiare un sistema e capirne il comportamento.

- **Impulso o delta di Dirac**
- **Gradino unitario**
- **Rampa**

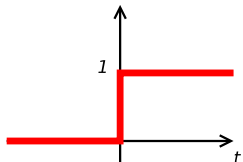
Delta di Dirac



Il **delta di Dirac** $\delta(t)$ o segnale impulsivo è matematicamente definito come segue:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta(t) & = & 0, \forall t \neq 0 \\ \delta(t) & = & +\infty, t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt & = & 1 \end{array} \right.$$

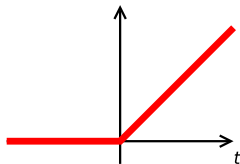
Esso è utilizzato per definire un fenomeno fisico di grande intensità ma di durata infinitesima.



Il **gradino unitario** $u(t)$ è un segnale costante definito come segue:

$$\begin{cases} u(t) = 0, \forall t < 0 \\ u(t) = 1, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Esso è utilizzato per modellare l'applicazione, al tempo 0, di uno stimolo costante ad un sistema.



La **rampa** $r(t)$ è un segnale crescente definito come segue:

$$\begin{cases} r(t) = 0, \forall t < 0 \\ r(t) = t, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Esso è utilizzato per modellare l'applicazione ad un sistema, al tempo 0, di uno stimolo che cresce indefinitamente.

Relazione tra Segnali Canonici

I segnali canonici godono di questa proprietà:

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

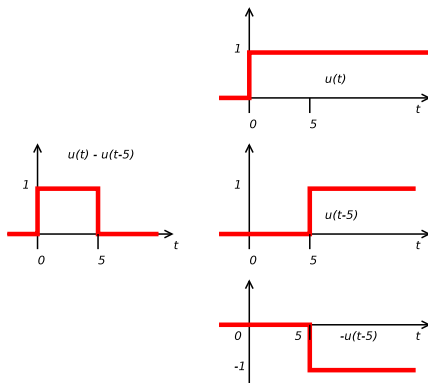
$$\int_0^t u(\tau) d\tau = r(t)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

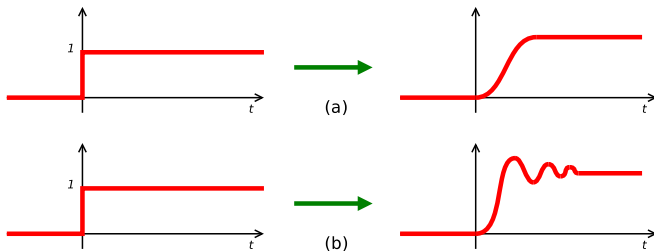
$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

Composizione di segnali canonici

- **Traslazione nel tempo** di un fattore $\overline{T}$ (in avanti):
 $s(t) \rightarrow s(t - \overline{T})$
- **Segnale rettangolare**

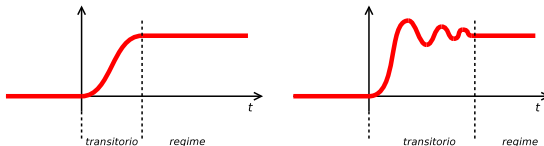


Risposte tipiche di un sistema al gradino unitario



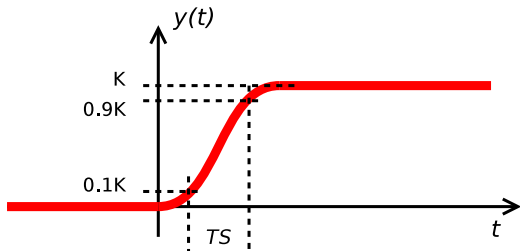
- **(a)** Sistema stabile con autovalori reali negativi
- **(b)** Sistema stabile con autovalori complessi e coniugati (a parte reale negativa)

Caratteristiche delle risposte al gradino



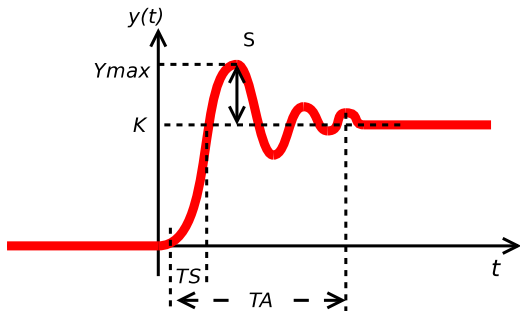
- **Transitorio:** risposta del sistema nella parte iniziale dell'evoluzione a partire dallo stato di quiete
- **Regime:** risposta del sistema dopo l'esaurimento del transitorio

Caratteristiche delle risposte al gradino



- **Guadagno a regime:** $K = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$
- **Tempo di salita:** TS , tempo impiegato dall'uscita, durante il transitorio, per passare dal 10% al 90% del valore del guadagno a regime K

Caratteristiche delle risposte al gradino



- **Sovraelongazione:** $S = \frac{y_{max} - K}{K}$, percentuale massima di scostamento dall'uscita dal valore a regime
- **Tempo di assestamento:** TA , tempo impiegato dall'uscita, durante il transitorio, stabilizzarsi nell'intorno del guadagno a regime (2% - 5% di scostamento da K)

Relazione tra i poli e la risposta al gradino

Sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Il sistema ha un polo in $-\beta$, quindi è asintoticamente stabile.
La risposta al gradino è:

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

Il valore del polo $-\beta$ influenza la “crescita” del fattore esponenziale.

- Più vicino è il polo all'origine, più importante è il contributo di $e^{-\beta t} \rightarrow$ **più lento è il sistema**
- Più lontano è il polo dall'origine, meno importante è il contributo di $e^{-\beta t} \rightarrow$ **più veloce è il sistema**

Sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Riposta al gradino:

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

Il polo $-\beta$ ha dimensioni di **frequenza** ($\text{Hz} = \text{sec}^{-1}$).

Il valore $T = \frac{1}{\beta}$ è detto **costante di tempo** del sistema:

$$y(t) = \alpha T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

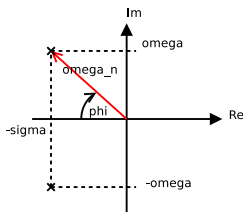
Il tempo di salita è (circa) 3 volte la costante di tempo:

$$T_S \simeq 3T = \frac{3}{\beta}$$

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2 + s\beta + s\gamma}$$

con poli $-\sigma \pm i\omega$, $\sigma > 0$.



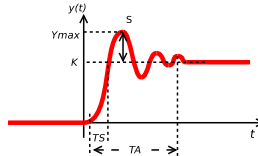
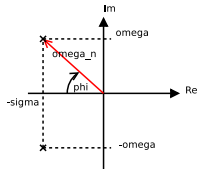
Il sistema è **asintoticamente stabile** e la risposta al gradino è:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi) \right)$$

$$\delta = \cos \phi$$

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

Poli: $-\sigma \pm i\omega$, $\sigma > 0$, $\phi = \text{angolo}$, $\delta = \cos \phi$



$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi) \right)$$

$$1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\omega}{2\pi}$$

Componente smorzante

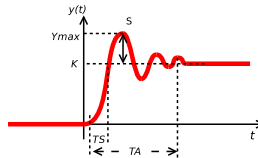
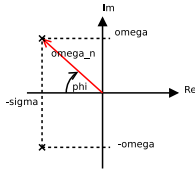
Componente oscillatoria

Pulsazione

Frequenza delle oscillazioni

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

Poli: $-\sigma \pm i\omega, \sigma > 0, \phi = \text{angolo}, \delta = \cos \phi$



$$y(t) = K(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi))$$

$$1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Componente smorzante

Componente oscillatoria

$$T_a \simeq \frac{3}{\sigma}$$

Tempo di assestamento

$$S = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Sovraelongazione

Segnali Canonici e Risposta di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici