

Esercitazioni di Programmazione Sistemi Robotici

Corrado Santoro

1 Teoria dei Sistemi

1.1 Esercizio 1

Sia dato un sistema dinamico caratterizzato dalla equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 0.5\dot{y} + 3y = u$$

dove u è l'ingresso e y è l'uscita; determinare una rappresentazione del sistema nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

1.1.1 Soluzione.

Si ponga $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$; otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 0.5x_2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

Dato il sistema dell'esercizio precedente, determinare i **modi** e discutere la stabilità.

1.2.1 Soluzione.

Si determinino gli autovalori della matrice A , i quali sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$|\lambda I - A| = 0$$

Calcoliamo $[\lambda I - A]$:

$$\begin{aligned}[\lambda I - A] &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Calcoliamo il determinante:

$$\lambda(\lambda + 0.5) + 3 = \lambda^2 + 0.5\lambda + 3$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione:

$$\lambda^2 + 0.5\lambda + 3 = 0$$

ossia:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.25 - 12}}{2} \\ &= -\frac{0.5}{2} \pm \frac{\sqrt{12 - 0.25}}{2}i\end{aligned}$$

Le radici sono **complesse e coniugate**; la parte reale è **negativa**, pertanto il sistema è **asintoticamente stabile**.

1.3 Esercizio 3

Dato il sistema dell'esercizio precedente, determinare i **punti di equilibrio** per l'ingresso costante $\bar{u}$.

1.3.1 Soluzione.

I punti di equilibrio sono soluzioni dell'equazione:

$$Ax + B\bar{u} = 0$$

Risolviamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ -3x_1 + -0.5x_2 + \bar{u} &= 0\end{aligned}$$

risolvendo otteniamo il punto di equilibrio:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\bar{u}}{3} \\ x_2 &= 0\end{aligned}$$

1.4 Esercizio 4

Dato il sistema dell'esercizio precedente, determinare la **funzione di trasferimento** $G(s)$.

1.4.1 Soluzione.

Il sistema in questione è:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le matrici sono:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La funzione di trasferimento è data da:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Determiniamo, in primo luogo, $sI - A$:

$$\begin{aligned}(sI - A) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s + 0.5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

quindi $(sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s + 0.5 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 3}$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento completa:

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= [1 \quad 0] \frac{\begin{bmatrix} s + 0.5 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s + 0.5 & 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 0.5s + 3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 0.5s + 3}\end{aligned}$$

1.5 Esercizio 5

Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s-1}$ determinare se il sistema è stabile e, in caso affermativo, calcolare il valore a regime della risposta al gradino.

1.5.1 Soluzione.

Determiniamo i poli:

$$\begin{aligned}s &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2.83}{2} \\ &= (-2.41, 0.41)\end{aligned}$$

Il sistema ha un polo reale positivo, pertanto risulta **instabile**.

1.6 Esercizio 6

Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$ determinare se il sistema è stabile e, in caso affermativo, calcolare il valore a regime della risposta al gradino.

1.6.1 Soluzione.

Determiniamo i poli:

$$\begin{aligned}s &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\&= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\&= \frac{-2 \pm 2i}{2} \\&= -1 \pm i\end{aligned}$$

Il sistema ha due poli complessi e coniugati a parte reale negativa, pertanto risulta **asintoticamente stabile**.

La trasformata di Laplace del gradino unitario è $U(s) = \frac{1}{s}$, pertanto la risposta al gradino del sistema è:

$$\frac{1}{s} \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Per conoscere il valore a regime $\bar{Y}$ applichiamo il **teorema del valore finale**:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

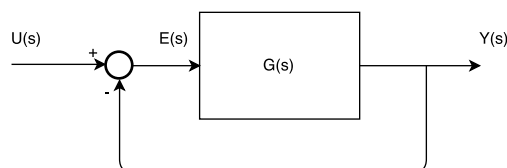
Da cui:

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{s+1}{s^2+2s+2} \\&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s^2+2s+2} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2 Controlli Automatici

2.1 Esercizio 1

Dato lo schema in figura e supposto $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$ determinare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso e discuterne la stabilità.



2.1.1 Soluzione.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}Y(s) &= E(s)G(s) \\E(s) &= U(s) - Y(s)\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= (U(s) - Y(s))G(s) \\
 Y(s) &= U(s)G(s) - Y(s)G(s) \\
 Y(s) + Y(s)G(s) &= U(s)G(s) \\
 Y(s)(1 + G(s)) &= U(s)G(s) \\
 Y(s) &= U(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)}
 \end{aligned}$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$\begin{aligned}
 \frac{G(s)}{1 + G(s)} &= \frac{\frac{s+1}{s^2+2s+2}}{1 + \frac{s+1}{s^2+2s+2}} \\
 &= \frac{\frac{s+1}{s^2+2s+2}}{\frac{s^2+2s+2+s+1}{s^2+2s+2}} \\
 &= \frac{s+1}{s^2+2s+2+s+1} \\
 &= \frac{s+1}{s^2+3s+3}
 \end{aligned}$$

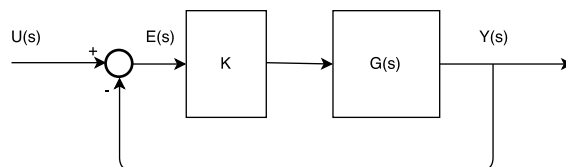
Determiniamo i poli:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} \\
 &= \frac{-3 \pm 1.73i}{2} \\
 &= -\frac{3}{2} \pm \frac{1.73}{2}i
 \end{aligned}$$

Il sistema a ciclo chiuso ha due poli complessi e coniugati a parte reale negativa, pertanto risulta **asintoticamente stabile**.

2.2 Esercizio 2

Dato lo schema in figura e supposto $G(s) = \frac{1}{s+0.5}$ discutere la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare della costante K .



2.2.1 Soluzione.

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è:

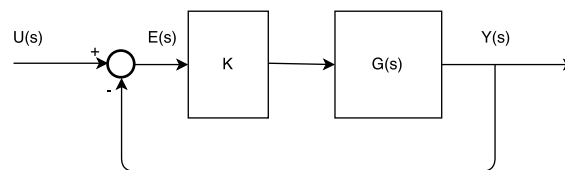
$$\begin{aligned}\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} &= \frac{\frac{K}{s+0.5}}{1 + \frac{K}{s+0.5}} \\ &= \frac{\frac{K}{s+0.5}}{\frac{s+0.5+K}{s+0.5}} \\ &= \frac{K}{s + 0.5 + K}\end{aligned}$$

Il sistema presenta un polo in $s = -(0.5 + K)$, tale polo risulta **negativo** per $0.5 + K > 0$, ovvero per $K > -0.5$. Pertanto:

per $K < -0.5$ sistema **instabile**
 per $K = -0.5$ sistema **semplicemente stabile**
 per $K > -0.5$ sistema **asintoticamente stabile**

2.3 Esercizio 3

Dato lo schema in figura e supposto $G(s) = \frac{5}{s+1}$, determinare il valore di K affinché il sistema a ciclo chiuso abbia un valore a regime della risposta al gradino pari a 0.5.



2.3.1 Soluzione.

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è:

$$\begin{aligned}\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} &= \frac{\frac{5K}{s+1}}{1 + \frac{5K}{s+1}} \\ &= \frac{\frac{5K}{s+1}}{\frac{s+1+5K}{s+1}} \\ &= \frac{5K}{s + 1 + 5K}\end{aligned}$$

Il sistema presenta un polo in $s = -(1 + 5K)$, tale polo risulta **negativo** per $1 + 5K > 0$, ovvero per $K > -\frac{1}{5}$.

Calcoliamo il valore a regime della risposta al gradino $U(s) = \frac{1}{s}$ utilizzando il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{5K}{s + 1 + 5K} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5K}{s + 1 + 5K} \\ &= \frac{5K}{1 + 5K}\end{aligned}$$

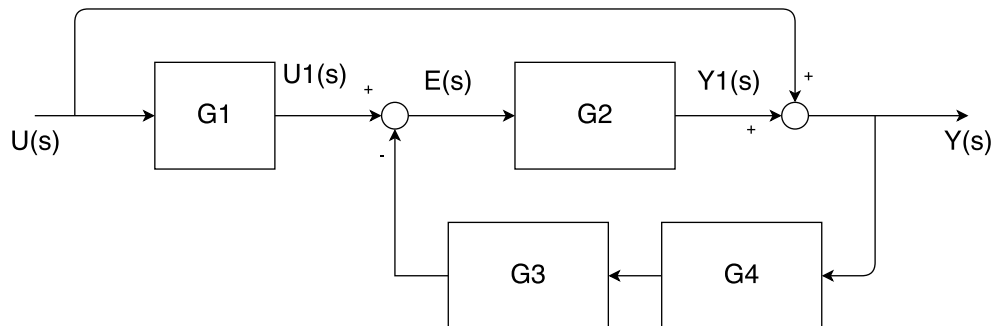
Tale valore deve essere uguale a 0.5 pertanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{5K}{1+5K} &= 0.5 \\
 5K &= 0.5(1+5K) \\
 5K &= \frac{1+5K}{2} \\
 10K &= 1+5K \\
 10K-5K &= 1 \\
 5K &= 1 \\
 K &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Per $K = \frac{1}{5}$ il sistema risulta anche asintoticamente stabile, pertanto tale valore è accettabile.

2.4 Esercizio 4

Dato lo schema in figura, determinare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso.



2.4.1 Soluzione.

Abbiamo le seguenti relazioni (si omette la dipendenza da s per brevità):

$$\begin{aligned}
 Y &= U + Y_1 \\
 Y_1 &= E G_2 \\
 E &= U_1 - Y G_4 G_3 \\
 U_1 &= U G_1
 \end{aligned}$$

Sostituiamo ed otteniamo:

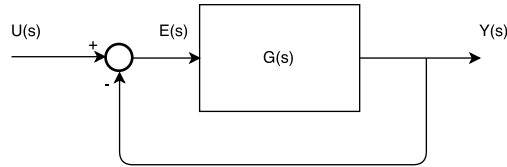
$$\begin{aligned}
 Y &= U + E G_2 \\
 Y &= U + (U_1 - Y G_4 G_3) G_2 \\
 Y &= U + (U G_1 - Y G_4 G_3) G_2 \\
 Y &= U + U G_1 G_2 - Y G_4 G_3 G_2 \\
 Y + Y G_4 G_3 G_2 &= U + U G_1 G_2 \\
 Y(1 + G_4 G_3 G_2) &= U(1 + G_1 G_2) \\
 Y &= U \frac{1 + G_1 G_2}{1 + G_4 G_3 G_2}
 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione di trasferimento risulta:

$$G(s) = \frac{1 + G_1 G_2}{1 + G_4 G_3 G_2}$$

2.5 Esercizio 5

Dato lo schema in figura e supposto $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$ determinare se la risposta a ciclo chiuso ha un andamento **oscillatorio smorzato**.



2.5.1 Soluzione.

Lo schema è lo stesso dell'esercizio 1 per il quale abbiamo già determinato la funzione di trasferimento:

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+3}$$

I poli sono i seguenti:

$$s = -\frac{3}{2} \pm \frac{1.73}{2}i$$

Essi sono **complessi e coniugati** con **parte reale negativa** pertanto:

- il sistema è asintoticamente stabile;
- la risposta è oscillatoria smorzata.

3 Sistemi Discreti

3.1 Esercizio 1

Dato un sistema caratterizzato dall'equazione alle differenze

$$y(k) + 2y(k-1) = 3u(k-2) - 0.5u(k-1)$$

calcolare la funzione di trasferimento in z .

3.2 Soluzione

Poichè, in z , ogni ritardo di n campioni corrisponde al prodotto con z^{-n} si ha:

$$Y(z) + 2Y(z)z^{-1} = 3U(z)z^{-2} - 0.5U(z)z^{-1}$$

Moltiplichiamo per z^2 in modo da non avere potenze di z negative:

$$\begin{aligned} Y(z)z^2 + 2Y(z)z &= 3U(z) - 0.5U(z)z \\ Y(z)(z^2 + 2z) &= U(z)(3 - 0.5z) \\ Y(z) &= U(z)\frac{3 - 0.5z}{z^2 + 2z} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento è pertanto:

$$G(z) = \frac{3 - 0.5z}{z^2 + 2z}$$

3.3 Esercizio 2

Dato il sistema discreto con funzione di trasferimento $G(z) = \frac{1}{z^2 + 0.5z}$ discuterne la stabilità.

3.4 Soluzione

Calcoliamo i poli:

$$\begin{aligned} z^2 + 0.5z &= 0 \\ z(z + 0.5) &= 0 \end{aligned}$$

Da cui i poli $z = 0$ e $z = -0.5$. Poichè entrambi hanno modulo minore di 1, il sistema è **asintoticamente stabile**.

3.5 Esercizio 3

Dato il sistema discreto dell'esercizio precedente, proporre una possibile implementazione in C.

3.6 Soluzione

Dalla funzione di trasferimento $G(z) = \frac{1}{z^2 + 0.5z}$ determiniamo l'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} Y(z) &= U(z) \frac{1}{z^2 + 0.5z} \\ (z^2 + 0.5z)Y(z) &= U(z) \\ z^2Y(z) + 0.5zY(z) &= U(z) \\ y(k+2) + 0.5y(k+1) &= u(k) \end{aligned}$$

Trasliamo di due campioni all'indietro:

$$\begin{aligned} y(k) + 0.5y(k-1) &= u(k-2) \\ y(k) &= u(k-2) - 0.5y(k-1) \end{aligned}$$

```
float Y[2] = {0, 0};
float U[3] = {0, 0, 0};

float transfer_function(float u)
{
    Y[0] = U[2] - 0.5*Y[1];

    Y[1] = Y[0];

    U[2] = U[1];
    U[1] = U[0];
    U[0] = u;

    return Y[0];
}
```

4 Programmazione Logica con PROFETA

4.1 Esercizio 1

Sia dato un insieme di numeri rappresentati da vari belief del tipo `num(X)`. Scrivere un programma PROFETA che calcoli il valore minimo (nota: è possibile rimuovere i belief dalla KB).

4.2 Soluzione

```
class num(Belief): pass
class find_min(Goal): pass

find_min() / num("X") >> [ -num("X"), find_min("X") ]
find_min("X") / (num("Y") & (lambda : int(Y) < int(X))) >> [ -num("Y"), find_min("Y") ]
find_min("X") / (num("Y") & (lambda : int(Y) >= int(X))) >> [ -num("Y"), find_min("X") ]
find_min("X") >> [ show_line("the_minimum_is", "X") ]
```

4.3 Esercizio 2

Sia dato un insieme di numeri rappresentati da vari belief del tipo `num(X)`. Scrivere un programma PROFETA che calcoli la media aritmetica (nota: è possibile rimuovere i belief dalla KB).

4.4 Soluzione

```
class num(Belief): pass
class avg(Goal): pass

avg() / num("X") >> [ -num("X"), avg("X", "1") ]
avg("Sum", "Count") / num("X") >> [ -num("X"),
                                     "Sum=_float(Sum)+_float(X)",
                                     "Count=_int(Count)+_1",
                                     avg("Sum", "Count") ]
avg("Sum", "Count") >> [ "X=_float(Sum)/int(Count)",
                         show_line("the_average_is", "X") ]
```

4.5 Esercizio 3

Si consideri un robot che deve riordinare una torre di blocchi numerati da 1 a 5 (dal basso verso l'alto). La torre è inizialmente costituita da blocchi disordinati; la presenza di un blocco sull'altro è indicata dal belief `stack(X, Y)` che indica che "X" è posto sopra "Y".

Scrivere un programma PROFETA che disassembli l'intera torre e poi la ricostituisca con l'ordine corretto.

Si supponga che il programma non conosca il numero totale di blocchi.

4.6 Soluzione

Usiamo i seguenti concetti:

- **find_top**, goal che permette di trovare il blocco "top"
- **unassemble**, goal che permette di disassemblare la torre
- **assemble**, goal che permette di assemblare la torre
- **ground**, belief che rappresenta la presenza di un blocco "X" sul tavolo

```
class stack(Belief): pass
class ground(Belief): pass

class find_top(Goal): pass
class unassemble(Goal): pass
class assemble(Goal): pass
```

Occorre disassemblare la torre e porre i vari blocchi sul tavolo. Tuttavia prima di far ciò dobbiamo trovare il "top" usando il goal `find_top()`:

```
find_top() >> [ find_top("1") ] # il blocco "1" esiste sicuro
find_top("X") / stack("Y", "X") >> [ find_top("Y") ]
find_top("X") >> [ unassemble("X") ]
```

A questo punto possiamo disassemblare usando il goal `unassemble()`. La presenza di un blocco “X” sul tavolo la indicheremo con il belief `ground(X)`:

```
unassemble("X") / stack("X", "Y") >> [ show_line("removing_block_", "X"),
                                         -stack("X", "Y"), +ground("X"),
                                         unassemble("Y") ]
unassemble("X") >> [ +ground("X") , assemble("1") ]
```

Finito il disassemblaggio, procediamo all’assemblaggio a partire dal blocco “1” fino a quando tutti i blocchi sul tavolo non sono esauriti:

```
assemble("1") >> [ -ground("1"), assemble("1", "2") ]
assemble("N1", "N2") / ground("N2") >> [ -ground("N2"), +stack("N2", "N1"),
                                           "N3=_str(int(N2)+1)",
                                           show_line("assembling_", "N2", "on_top_of", "N1"),
                                           assemble("N2", "N3") ]
assemble("N1", "N2") >> [ ]
```