

Elementi di Teoria dei Sistemi

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it

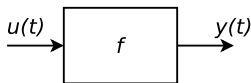


Programmazione Sistemi Robotici

Definizione di Sistema

Un **sistema** è un oggetto con un numero finito di gradi di libertà che evolve nel tempo secondo una legge deterministica

Un sistema è rappresentabile come una **black box** che può essere *stimolata* da una sollecitazione (ingresso) $u(t)$ e che produce un *effetto* (output) $y(t)$

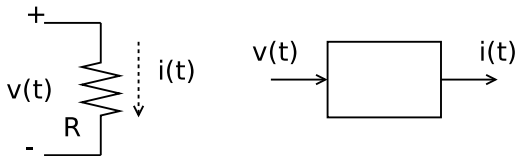


$$y(t) = f(u(t))$$

Il comportamento è **totalmente** descritto dalla funzione $f(\cdot)$.

Definizione di Sistema Statico

Un **sistema statico** è un sistema in cui, dato un istante di tempo T , il valore dell'uscita $y(T)$ dipende **solo ed esclusivamente** dal valore dell'ingresso allo stesso istante $u(T)$.

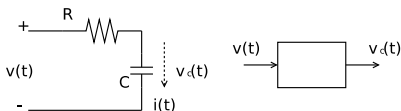


$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

Definizione di Sistema Dinamico

Un **sistema dinamico** è un sistema in cui, dato un istante di tempo T , il valore dell'uscita $y(T)$ dipende **dal valore istantaneo** e da **tutti i valori passati**, $u(t)$ con $t \in [0, T]$.

Un sistema dinamico (**tempo-continuo**) è descritto da un'**equazione differenziale** (nel tempo).



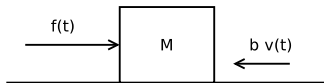
$$v(t) = Ri(t) + v_c(t) \qquad i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Esempio di Sistema Dinamico

Sia data una massa su un piano alla quale e' applicata una forza $f(t)$; sia b il coefficiente di attrito, determinare la legge del moto.

$a(t)$ = accelerazione, $v(t)$ = velocità



$$f(t) = Ma(t) + bv(t)$$

$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t)$$

Esempio di Sistema Dinamico: Soluzione

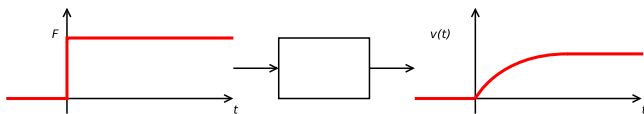
Sia $f(t) = \text{const} = F$ e $v(0) = 0$ (velocità iniziale nulla)



$$F = Ma(t) + bv(t)$$

$$F = M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t)$$

$$v(t) = \frac{F}{b} (1 - e^{-\frac{b}{M}t})$$



Perchè studiare i sistemi dinamici?

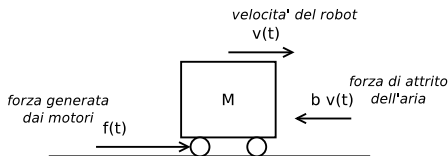
Sia dato un **robot** su ruote, di massa M , equipaggiato con motori elettrici per la trazione.

All'istante $T = 0$ applichiamo una corrente ai motori provocando la comparsa di una **forza di trazione** $f(t)$.

Come si comporta il robot?

Quale sarà l'andamento della velocità nel tempo?

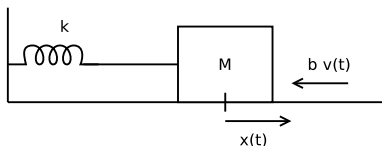
Quale sarà la sua velocità “a regime”?



Sistema Massa-Molla (oscillatore smorzato)

Sia data una massa su un piano alla quale è collegata una molla con costante elastica k ; sia b il coefficiente di attrito, determinare la legge del moto.

$a(t)$ = accelerazione, $v(t)$ = velocità $x(t)$ = posizione



$$Ma(t) = -bv(t) - kx(t)$$

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

Sistema Massa-Molla (oscillatore smorzato)

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \qquad \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \gamma = \frac{b}{2M}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Sistema Massa-Molla (oscillatore smorzato)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 =$ *pulsazione propria*

$\gamma =$ *fattore di smorzamento*

$$\gamma > \omega_0 \quad x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t} \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad (1)$$

$$\gamma = \omega_0 \quad x(t) = Ae^{-\omega_0 t} + Bte^{-\omega_0 t} \quad (2)$$

$$\gamma < \omega_0 \quad x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi) \quad (3)$$

Nel caso (3) si hanno oscillazioni alla frequenza $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$, smorzate sulla base del fattore γ .

Modello Canonico dei Sistemi Dinamici

Concetto di Stato

Variabili di Stato

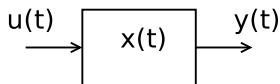
In un sistema dinamico, si definiscono **variabili di stato**, tutte le variabili $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ che rappresentano l'evoluzione del comportamento del sistema stesso

Variabili di Stato

In un sistema dinamico, si definisce **stato** al tempo T , il valore delle variabili di stato al tempo T : $x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)$.

Traiettoria

In un sistema dinamico, si definisce **traiettoria**, l'andamento nel tempo delle variabili di stato.



Un sistema dinamico è rappresentato dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

dove:

- $u(t)$ è l'**ingresso**
- $x(t)$ è lo **stato**
- $y(t)$ è l'**uscita**
- $f(x(t), u(t))$ è la **funzione di stato**
- $g(x(t), u(t))$ è la **funzione di uscita**

Massa su piano con attrito



$$f(t) = Ma(t) + bv(t)$$

$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t)$$

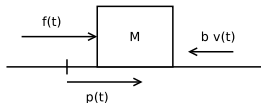
$$f = M\dot{v} + bv$$

- **ingresso** = f
- **stato** = v
- **uscita** = v

$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ y &= v \end{cases}$$

Massa su piano con attrito

Aggiungiamo anche la posizione



$$f(t) = Ma(t) + bv(t)$$

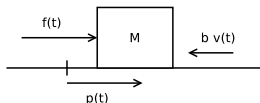
$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t)$$

$$f = M\dot{v} + bv$$

$$\dot{p} = v$$

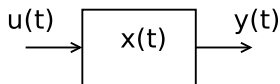
$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} = v \\ y = p \end{cases}$$

Massa su piano con attrito



$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} &= v \\ y &= p \end{cases}$$

- Le relazioni in rosso rappresentano **entrambe** l'evoluzione dello stato.
- Lo stato è pertanto rappresentato dal **vettore** $[v \ p]$.
- Generalizzando



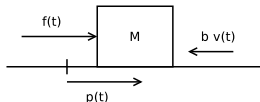
Un sistema dinamico è rappresentato dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

dove:

- $u(t)$ è il **vettore degli ingressi**
- $x(t)$ è il **vettore di stato**
- $y(t)$ è il **vettore di uscita**
- $f(x(t), u(t))$ è la **funzione (matriciale) di stato**
- $g(x(t), u(t))$ è la **funzione (matriciale) di uscita**

Massa su piano con attrito



$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} &= v \\ y &= p \end{cases}$$

diventa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} [f] \\ [y] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(y(t), u(t)) \end{cases}$$

Sistema Non Lineare

Si definisce **non lineare** un sistema dove $f(\cdot, \cdot)$ e $g(\cdot, \cdot)$ sono funzioni **non lineari**

Sistema Lineare

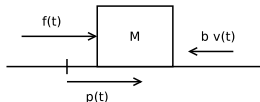
Si definisce **lineare** un sistema dove $f(\cdot, \cdot)$ e $g(\cdot, \cdot)$ sono funzioni **lineari**

Un **sistema lineare (tempo-)continuo** può essere rappresentato dal seguente sistema di equazioni lineari matriciali:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

- x , vettore di stato di n elementi
- u , vettore d'ingresso di m elementi
- y , vettore d'uscita di p elementi
- A , matrice di stato di dimensioni $n \times n$
- B , matrice d'ingresso di dimensioni $n \times m$
- C, D , matrici d'uscita di dimensioni risp. $p \times n$ e $p \times m$
- Se $D = 0$ il sistema si dice **proprio**
- Se $D \neq 0$ il sistema si dice **improprio**

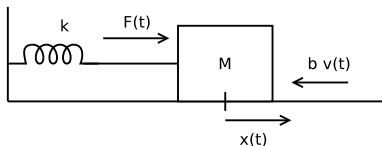
Massa su piano con attrito



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} [f] \\ [y] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1] & D &= [0] \end{aligned}$$

Sistema Massa-Molla (con forzante)



$$Ma(t) = -bv(t) - kx(t) + F(t)$$

$$M\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F(t)$$

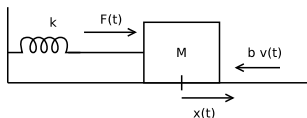
Poniamo $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ e consideriamo il vettore di stato $[x_1 \ x_2]$:

$$M\dot{x}_2 = -bx_2 - kx_1 + F(t)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}F(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Massa-molla



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} [F] \\ [y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Elementi di Teoria dei Sistemi

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici