

Analisi di un sistema dinamico con Matlab/Octave

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

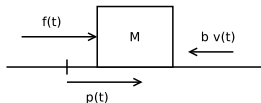
Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Massa su piano con attrito

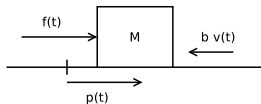


$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} [f] \\ [y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Qui l'uscita del sistema è la **velocità**

Massa su piano con attrito



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$M = 1 \text{ kg} \quad b = 0.5 \text{ Ns/m}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Definizione delle matrici in Matlab/Octave

```
octave:4> A=[-0.5 0; 1 0];  
octave:5> B=[1 ; 0];  
octave:6> C=[1 0];  
octave:7> D=[0];
```

Definizione delle matrici in Matlab/Octave

```
octave:4> A=[-0.5 0; 1 0];  
octave:5> B=[1 ; 0];  
octave:6> C=[1 0];  
octave:7> D=[0];
```

Stabilità

```
octave:8> eig(A)  
ans =
```

```
    0.00000  
   -0.50000
```

Il sistema è **asintoticamente stabile**

Risposta all'impulso e al gradino

Definizione del sistema in Matlab/Octave

```
octave:4> A=[-0.5 0; 1 0];  
octave:5> B=[1 ; 0];  
octave:6> C=[1 0];  
octave:7> D=[0];  
octave:8> sistema = ss(A, B, C, D);
```

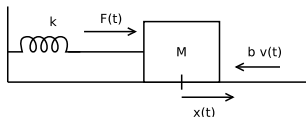
Risposta al gradino

```
octave:9> step(sistema)
```

Risposta all'impulso

```
octave:10> impulse(sistema)
```

Massa-molla



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} [F] \\ [y] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= [0] \\ x_1 &= pos & x_2 &= vel \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$k = 2N/m \quad M = 1Kg \quad b = 0.5Ns/m$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definizione delle matrici e stabilità

```
octave:20> A=[0 1; -2 -0.5];  
octave:21> B=[0 ; 1];  
octave:22> C=[1 0];  
octave:23> D=[0];  
octave:24> eig(A)  
ans =
```

```
-0.2500 + 1.3919i  
-0.2500 - 1.3919i
```

Il sistema è **asintoticamente stabile**

Risposta

Le risposte all'impulso e al gradino sono **oscillatorie smorzate**

Supponiamo un'ingresso costante $F = 4N$ e cerchiamo i punti di equilibrio che sono soluzione dell'equazione:

$$0 = Ax + BF$$

$$Ax = -BF$$

Definizione delle matrici e stabilità

```
octave:20> linsolve(A, -B*4)
```

```
ans =
```

```
2
```

```
0
```

Il punto di equilibrio $[2 \ 0]$ corrisponde a $pos = 2m$ e $vel = 0$

Massa-molla fortemente smorzata

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$k = 2N/m \quad M = 1Kg \quad b = 4Ns/m$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definizione delle matrici e stabilità

```
octave:20> A=[0 1; -2 -4];  
octave:21> B=[0 ; 1];  
octave:22> C=[1 0];  
octave:23> D=[0];  
octave:24> eig(A)  
ans =
```

```
-0.58579  
-3.41421
```

Il sistema è **asintoticamente stabile**

Risposta

Nelle risposte all'impulso e al gradino è **scomparsa** la componente **oscillatoria**

In un sistema del **secondo ordine asintoticamente stabile**

- Se gli autovalori di A sono **reali** (minori di 0), il comportamento è **semplicemente esponenziale** (verso l'equilibrio)
- Se gli autovalori di A sono **complessi e coniugati** (a parte reale minore di 0), il comportamento è **oscillatorio smorzato** (verso l'equilibrio)

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definizione delle matrici e stabilità

```
octave:20> A=[0 1; -2 0.5];  
octave:21> B=[0 ; 1];  
octave:22> C=[1 0];  
octave:23> D=[0];  
octave:24> eig(A)  
ans =
```

```
0.2500 + 1.3919i  
0.2500 - 1.3919i
```

Il sistema è **instabile**; le risposte all'impulso e al gradino sono **oscillatorie con ampiezza sempre crescente**

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definizione delle matrici e stabilità

```
octave:20> A=[0 1; -2 4];  
octave:21> B=[0 ; 1];  
octave:22> C=[1 0];  
octave:23> D=[0];  
octave:24> eig(A)  
ans =
```

```
0.58579  
3.41421
```

Il sistema è **instabile**; le risposte all'impulso e al gradino sono **divergenti**

Calcolo funzione di trasferimento

Il comando octave/matlab **tf** (transfer-function) permette di calcolare la funzione di trasferimento di un sistema:

```
octave:20> A=[0 1; -2 -0.5];  
octave:21> B=[0 ; 1];  
octave:22> C=[1 0];  
octave:23> D=[0];  
octave:24> sistema=ss(A,B,C,D);  
octave:25> g=tf(sistema)
```

Transfer function 'g' from input 'u1' to output ...

$$y1: \frac{1}{s^2 + 0.5 s + 2}$$

Continuous-time model.

Calcolo funzione di trasferimento

```
octave:25> g=tf(sistema)
```

Transfer function 'g' from input 'u1' to output ...

$$y1: \quad \frac{1}{s^2 + 0.5 s + 2}$$

Continuous-time model.

```
octave:26> step(g)
```

I comandi **step** e **impulse**, che permettono di visualizzare l'andamento della risposta al gradino e all'impulso di un sistema, consentono di passare, come parametro, anche una funzione di trasferimento.

Uso delle funzioni di trasferimento

Uso diretto funzione di trasferimento

Qualora si possieda la funzione di trasferimento, è possibile usare il comando **tf** fornendo i vettori dei coefficienti:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 5}$$

```
octave:25> g=tf([1 3], [1 2 5])
```

Transfer function 'g' from input 'u1' to output ...

$$\begin{array}{l} \text{y1:} \quad \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 5} \end{array}$$

Continuous-time model.

```
octave:26> step(g)
```

Il comando **tf2pzk** permette di calcolare gli **zeri**, i **poli** e il **guadagno statico** di un sistema data la sua funzione di trasferimento.

Poli e Zeri

```
octave:25> g=tf(sistema)
```

Transfer function 'g' from input 'u1' to output ...

$$y1: \frac{1}{s^2 + 0.5 s + 2}$$

Continuous-time model.

```
octave:26> [z,p,k] = tf2zp(g)
```

```
z = [] (0x1)
```

```
p =
```

```
-0.2500 + 1.3919i
```

```
-0.2500 - 1.3919i
```

```
k = 1
```

La funzione di trasferimento può essere fornita anche nella forma $\frac{N(s)}{D(s)}$ specificando i coefficienti dei polinomi $N(s)$ e $D(s)$.

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 3s - 5}$$

Poli e Zeri

```
octave:26> [z,p,k] = tf2zp([1 2], [1 3 -5])  
z = -2  
p =  
  
-4.1926  
1.1926  
  
k = 1
```

Se si conoscono gli zeri, i poli e il guadagno statico è possibile “sintetizzare” la funzione di trasferimento con il comando **zp2tf**:

Zeri: $s = 1$

Poli: $s = -4, s = -5$

Guadagno statico: 0.5

```
octave:26> [n,d] = zp2tf([1], [-4 -5], 0.5)
```

```
n =
```

```
0.50000 -0.50000
```

```
d =
```

```
1      9     20
```

La funzione è $G(s) = \frac{0.5s-0.5}{s^2+9s+20}$.

Analisi di un sistema dinamico con Matlab/Octave

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici