

Trasformata di Laplace e Funzione di Trasferimento

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Trasformata di Laplace

Definizione

La **trasformata di Laplace** è un operatore funzionale lineare che associa ad una funzione $f(t)$ con $t \in \mathcal{R}$ una funzione $F(s)$ con $s \in \mathcal{C}$, $s = \sigma + \omega i$, variabile **complessa**

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

L'operazione inversa è l'**anti-trasformata di Laplace**:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$r(t)$	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{bt} \cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$

Proprietà della trasformata di Laplace

- **Linearità:**

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}, a = \text{cost}$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

- **Derivazione:**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

- **Integrazione:**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Proprietà della trasformata di Laplace (2)

- **Traslazione in s :**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a)$$

- **Traslazione in t :**

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

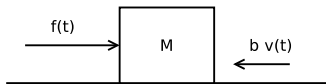
- **Teor. del valore iniziale:**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- **Teor. del valore finale:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Massa su piano: con trasformata di Laplace



$$Ma(t) = f(t) - bv(t)$$

$$M\dot{v} = f - bv$$

$$V = \mathcal{L}\{v\} \quad F = \mathcal{L}\{f\}$$

$$M(Vs - v(0)) = F - bV$$

$$v(0) = 0$$

$$MV_s = F - bV$$

$$MV_s + bV = F$$

$$V = \frac{1}{Ms + b} F$$

Massa su piano: risposta all'impulso



$$V = \frac{1}{Ms + b} F$$

Sia $f(t) = \delta(t)$, $F(s) = 1$:

$$V = \frac{1}{Ms + b} = \frac{1}{M} \frac{1}{s + \frac{b}{M}}$$

Anti-trasformiamo:

$$v(t) = \frac{1}{M} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{b}{M}} \right\}$$

$$v(t) = \frac{1}{M} e^{-\frac{b}{M}t}$$

Massa su piano: risposta al gradino



$$V = \frac{1}{Ms + b} F$$

Sia $f(t) = \bar{F}u(t)$, $F(s) = \bar{F}\frac{1}{s}$, con $\bar{F} = \text{cost}$:

$$V = \frac{1}{Ms + b} \frac{1}{s} \bar{F} = \frac{1}{M} \frac{1}{s} \frac{1}{s + \frac{b}{M}} \bar{F}$$

Anti-trasformiamo:

$$v(t) = \frac{1}{M} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{s + \frac{b}{M}} \bar{F} \right\}$$

$$v(t) = \frac{\bar{F}}{M} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{b}{M}} \right\} d\tau$$

$$v(t) = \frac{\bar{F}}{M} \int_0^t e^{-\frac{b}{M}\tau} d\tau = \frac{\bar{F}}{b} (1 - e^{-\frac{b}{M}t})$$

Funzione di Trasferimento



$$V(s) = \frac{1}{Ms + b} F(s)$$
$$V(s) = G(s) F(s)$$

$G(s)$ è detta **funzione di trasferimento**; essa caratterizza completamente il sistema ed è equivalente alla **risposta all'impulso** del sistema stesso.

Nei sistemi lineari essa è una funzione fratta $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ dove $N(s)$ e $D(s)$ sono due polinomi in s .

Calcolo della Funzione di Trasferimento

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Applichiamo la $\mathcal{L}$ -trasformata (supp. $x(0) = 0$):

$$sX - x(0) = AX + BU$$

$$sX = AX + BU$$

$$sX - AX = BU$$

$$(sI - A)X = BU$$

$$X = (sI - A)^{-1}BU$$

Sostituiamo nella funzione di uscita:

$$Y = C(sI - A)^{-1}BU$$

$$Y = (C(sI - A)^{-1}B)U$$

$$G(s) = (C(sI - A)^{-1}B)$$

Funzione di Trasferimento

Sia dato un sistema lineare descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

La funzione di trasferimento (in s) è:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Poli e Zeri di una Funzione di Trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Poli e Zeri

Si definiscono **zeri del sistema** i valori di s che annullano $N(s)$.

Si definiscono **poli del sistema** i valori di s che annullano $D(s)$.

I poli coincidono con gli autovalori di A perchè $D(s)$ è coincide con il polinomio caratteristico di A .

Poli e Zeri di una Funzione di Trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Poli e Zeri

Gli **zeri** rappresentano le **frequenze che annullano** l'uscita.

I **poli (modi)** rappresentano le **frequenze naturali del sistema**.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Guadagno Statico

Il **guadagno statico** di un sistema (asintoticamente stabile) è il valore a regime della risposta al gradino:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Trasformata di Laplace e Funzione di Trasferimento

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici