

Sistemi Dinamici

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it

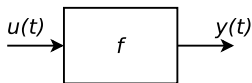


Programmazione Sistemi Robotici

Definizione di Sistema

Un **sistema** è un oggetto con un numero finito di gradi di libertà che evolve nel tempo secondo una legge deterministica

Un sistema è rappresentabile come una **black box** che può essere *stimolata* da una sollecitazione (ingresso) $u(t)$ e che produce un *effetto* (output) $y(t)$



$$y(t) = f(u(t))$$

Il comportamento è **totalmente** descritto dalla funzione $f(\cdot)$.

Un **sistema statico** è un sistema in cui, dato un istante di tempo t , il valore dell'uscita $y(t)$ dipende **solo ed esclusivamente** dal valore dell'ingresso allo stesso istante $u(t)$.

$$y(t) = f(u(t), t)$$

Definizione di Sistema Dinamico

Un **sistema dinamico** è un sistema in cui, dato un istante di tempo t , il valore dell'uscita $y(t)$ dipende **dal valore istantaneo** e da **tutti i valori passati** di $u(t)$ e di $y(t)$.

Un sistema dinamico (**tempo-continuo**) è descritto da un'**equazione differenziale** (nel tempo).

$$y = f(\dot{y}, \ddot{y}, \dots, u, \dot{u}, \ddot{u}, t)$$

Perchè studiare i sistemi dinamici?

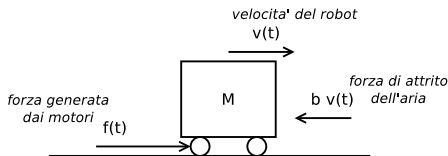
Sia dato un **robot** su ruote, di massa M , equipaggiato con motori elettrici per la trazione.

All'istante $T = 0$ applichiamo una corrente ai motori provocando la comparsa di una **forza di trazione** $f(t)$.

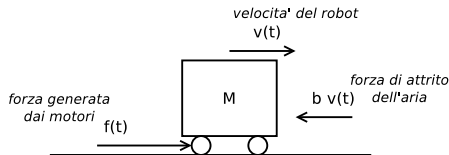
Come si comporta il robot?

Quale sarà l'andamento della velocità nel tempo?

Quale sarà la sua velocità “a regime”?



Studiamo il sistema dinamico “robot”

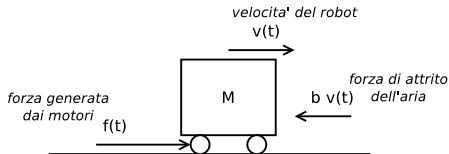


Secondo Principio della Dinamica

La somma delle forze che agiscono su un corpo è uguale alla massa del corpo moltiplicato la sua accelerazione.

$$\sum F(t) = M a(t)$$

Studiamo il sistema dinamico “robot”



Input (causa) = $f(t)$

Output (effetto) = $v(t)$

$$f(t) - b v(t) = M a(t)$$

$$f(t) - b v(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$$

$$f - b v = M \dot{v}$$

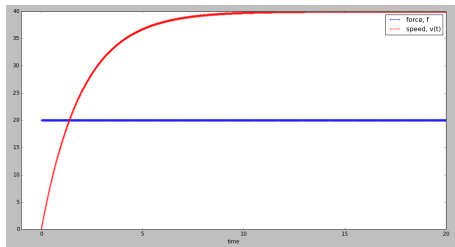
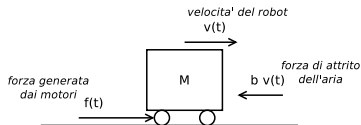
$$v(t) = ?$$

Soluzione del Sistema Dinamico “robot”

Soluzione nel caso di ingresso costante

Sia $f(t) = \text{const} = F$ e $v(0) = 0$ (velocità iniziale nulla), allora la soluzione dell'equazione differenziale è la seguente:

$$v(t) = \frac{F}{b}(1 - e^{-\frac{b}{M}t})$$



Soluzione del Sistema Dinamico “robot”

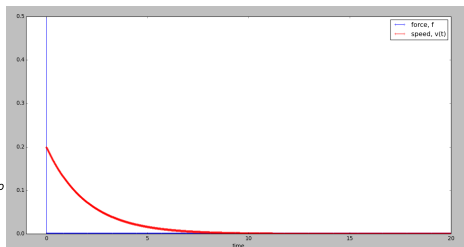
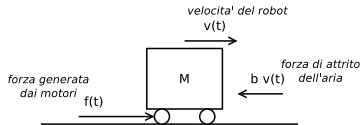
Soluzione nel caso di ingresso impulsivo

Sia:

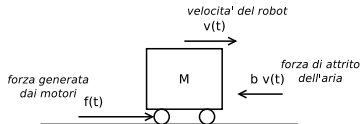
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

e $v(0) = 0$ (velocità iniziale nulla), allora la soluzione dell'equazione differenziale è la seguente:

$$v(t) = \frac{F}{M} e^{-\frac{b}{M}t}$$



Completiamo il sistema dinamico “robot”



Se consideriamo sia **velocità** v che **posizione** p , il modello è:

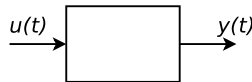
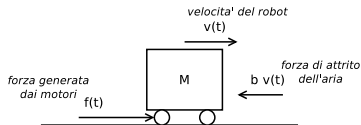
$$\begin{cases} \dot{v} &= -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} &= v \end{cases}$$

Il **sistema fisico** è rappresentato da un **sistema matematico (lineare)** di equazioni differenziali

I valori delle variabili v e p rappresentano lo **stato del sistema** in un determinato istante di tempo, pertanto esse vengono dette **variabili di stato**

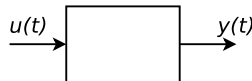
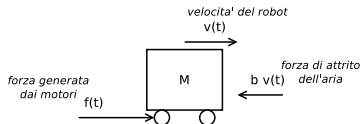
Rappresentazione dei Sistemi Dinamici

Sistema Dinamico come “black-box”



- Il **sistema come “black-box”** possiede un **ingresso** (lo “stimolo”) e un’**uscita**
- Il comportamento è rappresentato da un sistema di equazioni differenziali (**equazioni di stato**) dove le **variabili di stato** compaiono alla derivata prima
- L’**ingresso** interviene nell’equazioni di stato
- Una combinazione lineare delle variabili di stato costituisce l’**uscita**

Sistema Dinamico come “black-box”



Il nostro robot per il quale vogliamo modellare la **posizione**

- Ingresso $u(t) = f(t)$
- Equazioni di Stato $\begin{cases} \dot{v} = -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} = v \end{cases}$
- Variabili di Stato $v(t), p(t)$
- Uscita $y(t) = p(t)$

Modello di un Sistema Dinamico

Il nostro robot per il quale vogliamo modellare la **posizione**

- **Equazioni di Stato**
$$\begin{cases} \dot{v} = -\frac{b}{M}v + \frac{1}{M}f \\ \dot{p} = v \end{cases}$$
- Sappiamo che un sistema di equazioni lineari può essere rappresentato in una **forma matriciale**
- Incapsuliamo le variabili di stato in un **vettore**:

$$x = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix}$$

Equazioni di stato in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} f$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} f$$

Equazione di stato in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} f$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} f$$

Poniamo:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{M} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \quad u = f$$

Otteniamo l'equazione di stato **generalizzata** in **forma matriciale**:

$$\dot{x} = A x + B u$$

Equazione di uscita in forma matriciale

- L'uscita y è una **combinazione lineare** delle variabili di stato (vettore di stato) $x = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}$
- Se la nostra uscita è la posizione p , per “estrarla” dal vettore di stato, è sufficiente moltiplicare il vettore per $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}$$

Generalizzando:

$$y = C x$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un **sistema lineare (tempo-)continuo tempo-invariante** è rappresentato dal seguente sistema di equazioni lineari matriciali:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

- x , vettore di stato di n elementi
- u , vettore d'ingresso di m elementi
- y , vettore d'uscita di p elementi
- A , matrice di stato di dimensioni $n \times n$
- B , matrice d'ingresso di dimensioni $n \times m$
- C , matrice d'uscita di dimensioni $p \times n$

Importanza dell'equazione di stato

$$\dot{x} = A x + B u \quad (1)$$

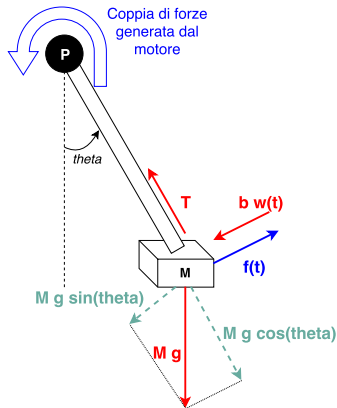
L'equazione di stato si compone di due parti:

- La matrice A caratterizza l'**evoluzione dello stato**
- La matrice B rappresenta il contributo dell'ingresso (nell'evoluzione)
- Se $u = 0$, si parla di **evoluzione libera**, l'equazione di stato diventa:
 $\dot{x} = A x$
- Quando $u \neq 0$, si parla di **evoluzione forzata**, e l'ingresso viene denominato **forzante**
- La matrice A riveste un'importanza fondamentale poichè possiede al suo interno tutte le **caratteristiche dinamiche** del sistema (tipologia e durata del transitorio)
- Se possediamo la rappresentazione nella forma (1) non abbiamo bisogno di risolvere l'equazione differenziale per conoscere il comportamento del sistema, basta analizzare la matrice A

Modello Semplificato di Braccio Robotico

Modello di Giunto Robotico

- Consideriamo un giunto robotico pilotato da un motore elettrico incardinato in P
- Al giunto è connessa un'asta rigida (di massa trascurabile)
- Alla fine dell'asta è connesso un carico di massa M
- Il motore in P genera una coppia che si riflette nell'applicazione della forza $f(t)$ sulla massa M
- Consideriamo un sistema di **coordinate polari** dove:
 - θ , *posizione angolare*
 - $\omega = \dot{\theta}$, *velocità angolare*
 - $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, *accelerazione angolare*

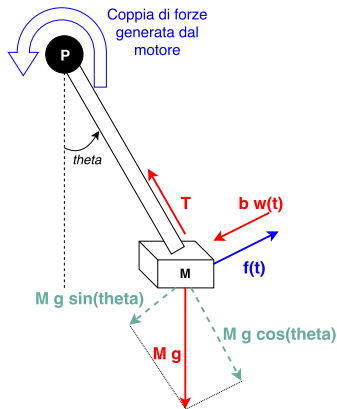


Modello di Giunto Robotico

Forze Coinvolte

- $f(t)$, risultante della coppia generata dal motore applicata alla massa
- T , reazione vincolare dell'asta
- $b \omega = b \dot{\theta}$, resistenza (attrito) dell'aria
- $M g$, forza peso
- $M g \cos \theta$, componente della forza peso lungo la direzione dell'asta
- $M g \sin \theta$, componente della forza peso lungo la perpendicolare alla direzione dell'asta
- Secondo principio della dinamica in coordinate polari:

$$\sum F = M \alpha = M \ddot{\theta}$$



Equazioni

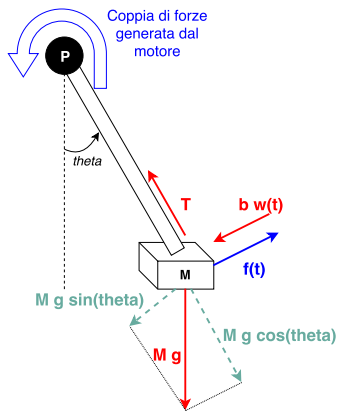
$$T = Mg \cos \theta$$

$$f - Mg \sin \theta - b\omega = M \alpha$$

Siamo interessati solo alla seconda:

$$f - Mg \sin \theta - b\dot{\theta} = M \ddot{\theta}$$

La quale risulta essere un'equazione differenziale del **secondo ordine** (contiene la derivata seconda) **non lineare!!** (contiene $\sin \theta$)



Equazioni

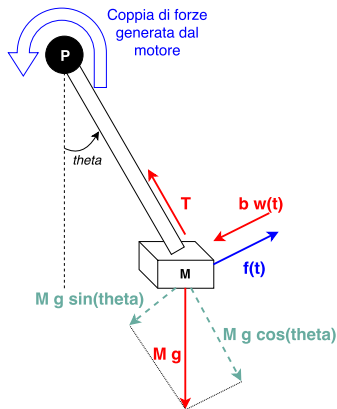
$$f - Mg \sin \theta - b\dot{\theta} = M \ddot{\theta}$$

Applichiamo l'approssimazione (per piccole oscillazioni) $\sin \theta \approx \theta$, otteniamo

$$f - Mg\theta - b\dot{\theta} = M \ddot{\theta}$$

E considerando θ e ω come **variabili di stato**, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -g\theta - \frac{b}{M}\omega + \frac{1}{M}f \end{cases}$$



Modello di Giunto Robotico

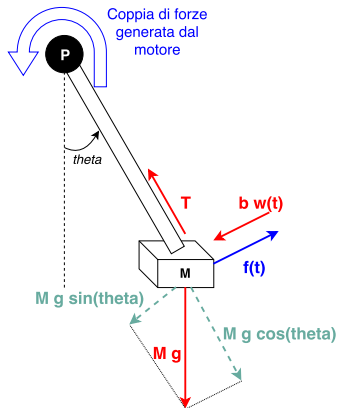
Equazioni

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -g\theta - \frac{b}{M}\omega + \frac{1}{M}f \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$



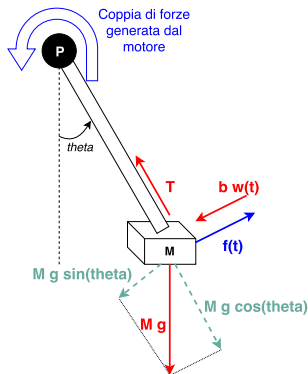
Comportamento del Giunto Robotico

Equazioni

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Comportamento

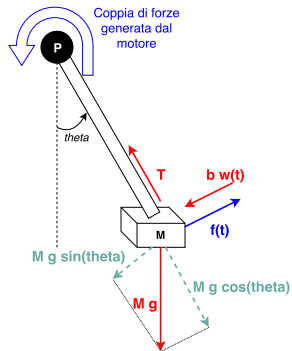
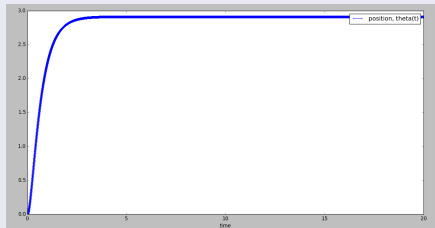
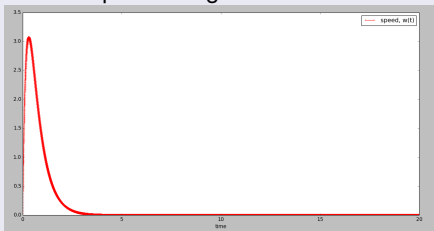
- Il comportamento del sistema **non è univoco** come nel caso del robot su ruote
- A seconda del rapporto $\frac{b}{M}$ possiamo avere un andamento:
 - **Esponenziale semplice**
 - **Oscillatorio smorzato**



Comportamento del Giunto

Esponenziale semplice

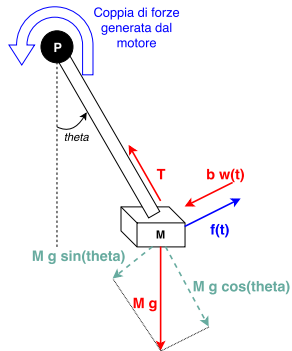
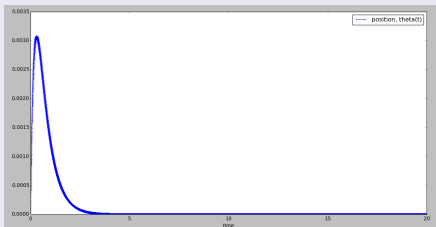
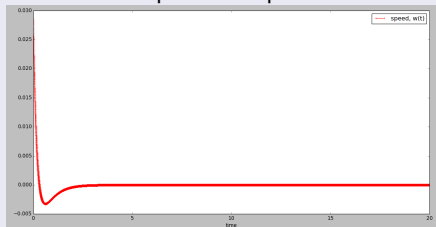
Risposta a ingresso costante



Comportamento del Giunto

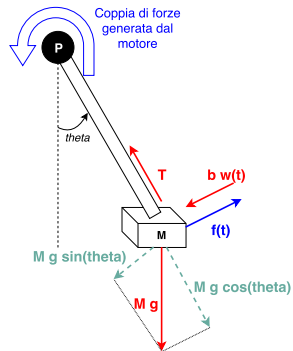
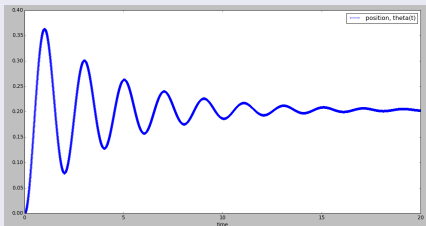
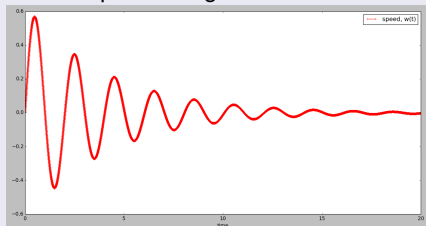
Esponenziale semplice

Risposta a impulso



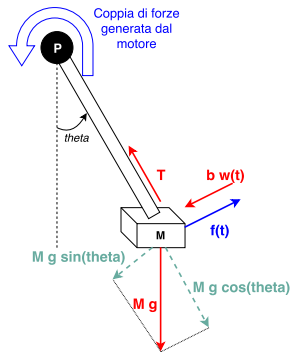
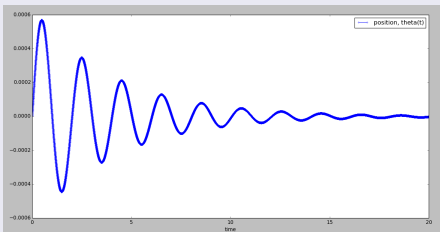
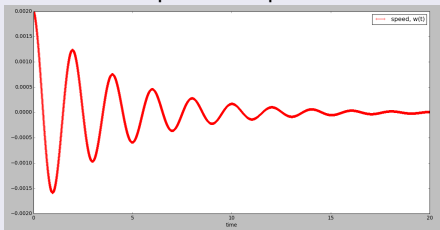
Oscillatore smorzato

Risposta a ingresso costante



Oscillatore smorzato

Risposta a impulso



Sistemi Dinamici

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici