

Rappresentazione di un sistema dalla sua funzione di trasferimento

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

Sia dato un sistema la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Come possiamo derivare la sua rappresentazione nello spazio di stato?

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

Sia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Introduciamo una variabile “di passaggio” $X(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

E separiamo i due rapporti:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = N(s) \quad \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)}$$

Dalla G(s) alla rappresentazione di stato

Consideriamo:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$X(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n) = U(s)$$

$$X(s)s^n + X(s)a_1 s^{n-1} + X(s)a_2 s^{n-2} + \dots + X(s)a_n = U(s)$$

Ricordiamo che se

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

allora

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \mathcal{L}^{-1}\{s^n X(s)\}$$

Dalla G(s) alla rappresentazione di stato

$$X(s)s^n + X(s)a_1s^{n-1} + X(s)a_2s^{n-2} + \dots + X(s)a_n = U(s)$$

Passando al dominio del tempo:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = u$$

Poniamo:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{x} = \dot{x}_2$$

...

$$x_n = x^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1}$$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = u$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{x} = \dot{x}_2$$

...

$$x_n = x^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1}$$

Sostituiamo:

$$\dot{x}_n + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1 = u$$

Dalla G(s) alla rappresentazione di stato

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= \dot{x} = \dot{x}_1 \\x_3 &= \ddot{x} = \dot{x}_2 \\&\dots \\x_n &= \overset{(n-1)}{x} = \dot{x}_{n-1}\end{aligned}$$

$$\dot{x}_n + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \dots + a_{n-1} x_2 + a_n x_1 = u$$

Mettiamo in ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u \end{array} \right.$$

Dalla G(s) alla rappresentazione di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u \end{cases}$$

Rappresentiamo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Abbiamo ottenuto l'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

Consideriamo:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m$$

$$Y(s) = X(s)(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m)$$

$$Y(s) = X(s)b_0 s^m + X(s)b_1 s^{m-1} + X(s)b_2 s^{m-2} + \dots + X(s)b_m$$

Ricordiamo che se

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

allora

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \mathcal{L}^{-1}\{s^n X(s)\}$$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

$$Y(s) = X(s)b_0s^m + X(s)b_1s^{m-1} + X(s)b_2s^{m-2} + \dots + X(s)b_m$$

Passando al dominio del tempo:

$$y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + b_2 \overset{(m-2)}{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$$

Poichè:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{x} = \dot{x}_2$$

...

$$x_m = \overset{(m-1)}{x} = \dot{x}_{m-1}$$

otteniamo:

$$y = b_m x_1 + b_{m-1} x_2 + \dots + b_2 x_{m-1} + b_1 x_m + b_0 x_{m+1}$$

Dalla G(s) alla rappresentazione di stato

$$y = b_m x_1 + b_{m-1} x_2 + \dots + b_2 x_{m-1} + b_1 x_m + b_0 x_{m+1}$$

Supposto $m < n$ e rappresentando in forma matriciale si ha:

$$y = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

Riassumendo, sia (con $m < n$):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

Otteniamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dalla $G(s)$ alla rappresentazione di stato

Riassumendo, sia (con $m < n$):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

Otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\quad b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots]$$

Rappresentazione di un sistema dalla sua funzione di trasferimento

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmf.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici