

Poli e Risposta al gradino di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Il sistema ha un polo in $-\beta$, quindi è asintoticamente stabile.
La risposta al gradino è:

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

Il valore del polo $-\beta$ influenza la “crescita” del fattore esponenziale.

- Più vicino è il polo all'origine, più importante è il contributo di $e^{-\beta t} \rightarrow$ **più lento è il sistema**
- Più lontano è il polo dall'origine, meno importante è il contributo di $e^{-\beta t} \rightarrow$ **più veloce è il sistema**

Sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Riposta al gradino:

$$y(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$$

Il polo $-\beta$ ha dimensioni di **frequenza** ($\text{Hz} = \text{sec}^{-1}$).

Il valore $T = \frac{1}{\beta}$ è detto **costante di tempo** del sistema:

$$y(t) = \alpha T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

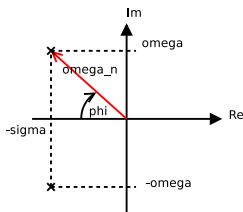
Il tempo di salita è (circa) 3 volte la costante di tempo:

$$T_S \simeq 3T = \frac{3}{\beta}$$

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2 + s\beta + s\gamma}$$

con poli $-\sigma \pm i\omega$, $\sigma > 0$.



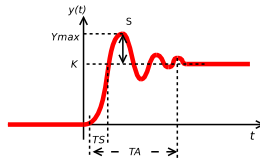
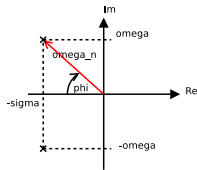
Il sistema è **asintoticamente stabile** e la risposta al gradino è:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi) \right)$$

$$\delta = \cos \phi$$

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

Poli: $-\sigma \pm i\omega$, $\sigma > 0$, $\phi = \text{angolo}$, $\delta = \cos \phi$



$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi) \right)$$

$$1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

Componente smorzante

$$\sin(\omega t + \phi)$$

Componente oscillatoria

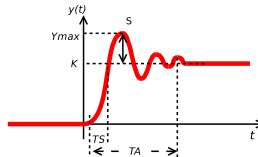
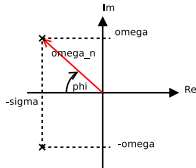
$$\frac{\omega}{2\pi}$$

Pulsazione

Frequenza delle oscillazioni

Sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati

Poli: $-\sigma \pm i\omega, \sigma > 0, \phi = \text{angolo}, \delta = \cos \phi$



$$y(t) = K(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi))$$

$$1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Componente smorzante

Componente oscillatoria

$$T_a \simeq \frac{3}{\sigma}$$

Tempo di assestamento

$$S = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Sovraelongazione

Poli e Risposta al gradino di un Sistema

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici