

Analisi dei Sistemi di Controllo PID

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

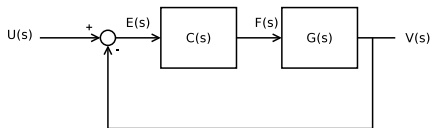
Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici

Controllo a “ciclo chiuso”



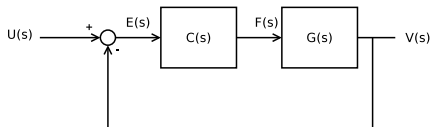
La funzione di trasferimento ingresso-uscita $U(s) \rightarrow V(s)$ è

$$H_{CL}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

La funzione di trasferimento ingresso-errore $U(s) \rightarrow E(s)$ è

$$H_E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Valore a regime sull'uscita



$$H_{CL}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

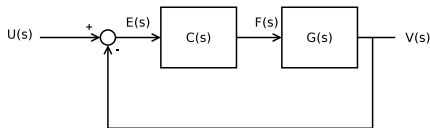
Sia $U(s) = \frac{\bar{v}}{s}$, cioè un gradino di ampiezza $\bar{v}$, allora il **valore a regime dell'uscita** è (teorema del valore finale):

$$v' = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{CL}(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{CL}(s)\frac{\bar{v}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H_{CL}(s)\bar{v}$$

Affinche' (a regime) l'uscita "segua" l'ingresso allora $C(s)$ deve essere tale che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_{CL}(s) = 1$$

Valore a regime sull'errore



$$H_E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

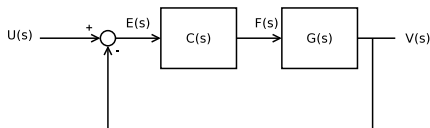
Sia $U(s) = \frac{\bar{v}}{s}$, cioè un gradino di ampiezza $\bar{v}$, allora il **valore a regime dell'errore** è (teorema del valore finale):

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_E(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_E(s)\frac{\bar{v}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H_E(s)\bar{v}$$

Affinche' (a regime) l'uscita "segua" l'ingresso allora l'errore **deve annullarsi**, quindi $C(s)$ deve essere tale che:

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_E(s) = 0$$

Durata del transitorio



$$H_{CL}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

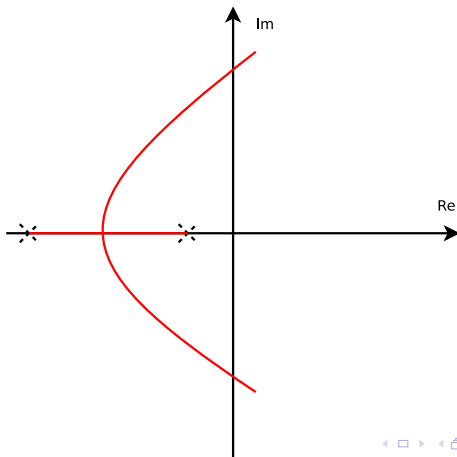
La durata del transitorio di un sistema è (circa) $\frac{3}{-Re(p)}$ dove p è il polo **più vicino** all'asse immaginario (polo dominante).

Se il requisito è un transitorio che duri (circa) $\overline{T}$, allora $C(s)$ deve essere tale che il **polo dominante** $\bar{p}$ di $H_{CL}(s)$ sia $\simeq \frac{3}{-\overline{T}}$.

- La progettazione di un controllore $C(s)$ che consenta, al sistema a ciclo chiuso, di rispettare determinati requisiti è detta **sintesi**
- I metodi noti in letteratura sono due tipi
 - 1 **Analitici**
 - 2 **Empirici**
- **Analitici**
 - a partire dalle specifiche si determina il **guadagno statico** e la **posizione dei poli dominanti** di $H_{CL}(s)$; a seguire si determina $C(s)$
- **Empirici**
 - si usano delle **forme standard** di controllore $C(s)$, in cui variando alcuni parametri numerici, è possibile variare il comportamento della $H_{CL}(s)$
 - Se il comportamento non è quello desiderato, si aggiustano via via tali parametri

Andamento dei Poli: Luogo delle Radici

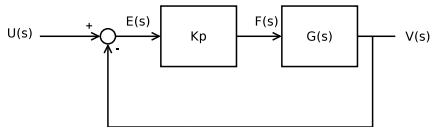
- Il **luogo delle radici** è una curva sul piano complesso che rappresenta l'andamento dei **poli a ciclo chiuso** al variare dei parametri del controllore
- E' un metodo utilizzato per comprendere come si modifica il sistema e per determinare i poli desiderati della funzione a ciclo chiuso



Controllore Proporzionale

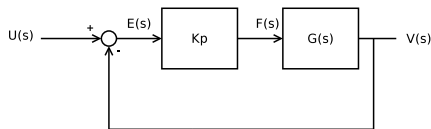
Consideriamo:

- un sistema del primo ordine $G(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$
- un controllore **puramente proporzionale** $C(s) = K_p$



$$H_{CL}(s) = \frac{K_p \alpha}{s + \beta + K_p \alpha}$$
$$H_E(s) = \frac{s + \beta}{s + \beta + K_p \alpha}$$

Controllore Proporzionale: Transitorio



$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0 \quad \text{polo in } -\beta$$

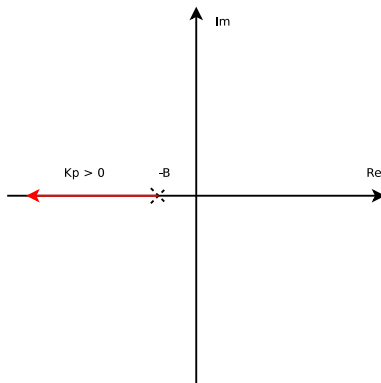
$$H_{CL}(s) = \frac{K_p \alpha}{s + \beta + K_p \alpha} \quad \text{polo in } -(\beta + K_p \alpha)$$

Il sistema a ciclo chiuso è **più veloce** (secondo K_p) del sistema a ciclo aperto

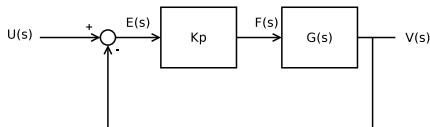
Il controllore proporzionale **ha migliorato** la dinamica

Controllore Proporzionale: Luogo delle Radici

$$H_{CL}(s) = \frac{K_p \alpha}{s + \beta + K_p \alpha} \quad \text{polo in } -(\beta + K_p \alpha)$$



Controllore Proporzionale: Errore a Regime



$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0$$

$$H_E(s) = \frac{s + \beta}{s + \beta + \alpha K_p}$$

$$\text{errore} = \lim_{s \rightarrow 0} H_E(s) = \frac{\beta}{\beta + \alpha K_p}$$

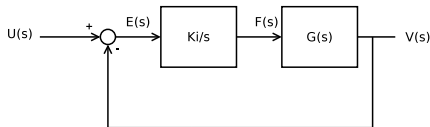
L'errore a regime **si riduce** tanto più grande è K_p , ma **non si annulla mai!**

L'uscita avrà sempre un errore non nullo rispetto al riferimento

Controllore Integratore

Consideriamo:

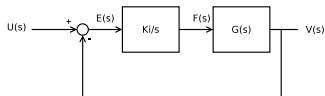
- un sistema del primo ordine $G(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$
- un controllore di tipo **integratore** $C(s) = \frac{K_i}{s}$



$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha K_i}{s^2 + s\beta + \alpha K_i}$$

$$H_E(s) = \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s\beta + \alpha K_i}$$

Controllore Integratore: Poli a ciclo chiuso



$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0 \quad \text{polo in } -\beta$$

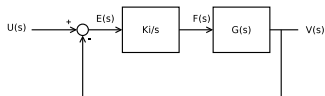
$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha K_i}{s^2 + s\beta + \alpha K_i}$$

Il sistema a ciclo chiuso ha i poli in:

$$p = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha K_i}}{2}$$

Se $\beta^2 - 4\alpha K_i < 0$, i poli diventano **complessi e coniugati** $\Rightarrow$ il sistema diventa del secondo ordine con **risposta oscillatoria smorzata**

Controllore Integratore: Transitorio



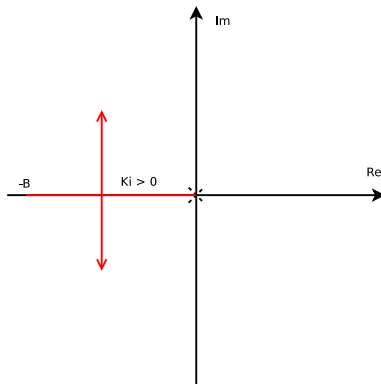
$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0 \quad \text{polo in } -\beta$$

$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha K_i}{s^2 + s\beta + \alpha K_i} \quad \text{poli in } \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha K_i}}{2}$$

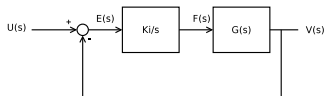
- Se $\beta^2 - 4\alpha K_i \geq 0$, il sistema ha un **due poli reali**, uno dei due è **più vicino all'asse immaginario** rispetto a $-\beta \Rightarrow$ **il sistema è più lento!**
- Se $\beta^2 - 4\alpha K_i < 0$, il sistema ha **due poli complessi e coniugati**, la parte reale è $-\frac{\beta}{2} \Rightarrow$ **il sistema è più lento e presenta una risposta oscillatoria smorzata**

Controllore Integratore: Luogo delle Radici

$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha K_i}{s^2 + s\beta + \alpha K_i} \quad \text{poli in } \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha K_i}}{2}$$



Controllore Integratore: Errore a Regime



$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0$$

$$H_E(s) = \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s\beta + \alpha K_i}$$

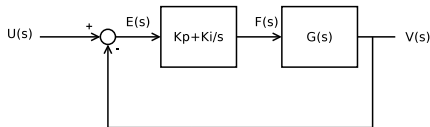
$$\lim_{s \rightarrow 0} H_E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s\beta + \alpha K_i} = 0$$

Il controllore integratore **annulla l'errore a regime!**

Controllore Proporzionale-Integrale

Consideriamo:

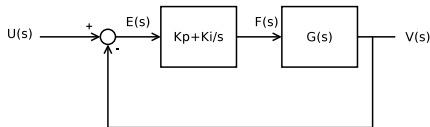
- un sistema del primo ordine $G(s) = \frac{\alpha}{s+\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$
- un controllore di tipo **proporzionale-integrale (PI)** $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$



$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha s + \alpha K_i}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i}$$

$$H_E(s) = \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i}$$

Controllore Proporzionale-Integrale: Poli a ciclo chiuso



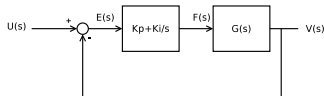
$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0 \quad \text{polo in } -\beta$$

$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha s + \alpha K_i}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i}$$

Il sistema a ciclo chiuso ha i poli in:

$$p = \frac{-(\beta + \alpha K_p) \pm \sqrt{(\beta + \alpha K_p)^2 - 4\alpha K_i}}{2}$$

Controllore Proporzionale-Integrale: Transitorio

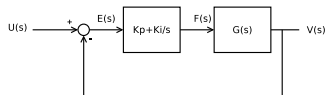


$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0 \quad \text{polo in } -\beta$$

$$H_{CL}(s) = \frac{\alpha s + \alpha K_i}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i} \quad p = \frac{-(\beta + \alpha K_p) \pm \sqrt{(\beta + \alpha K_p)^2 - 4\alpha K_i}}{2}$$

- Se $(\beta + \alpha K_p)^2 - 4\alpha K_i \geq 0$, il sistema ha un **due poli reali, più lontani dall'asse immaginario** rispetto e $-\beta$ **per determinati valori di K_p e K_i**
 $\Rightarrow$ **il sistema può essere più veloce!**
- Se $(\beta + \alpha K_p)^2 - 4\alpha K_i < 0$, il sistema ha **due poli complessi e coniugati**, la **parte reale** è $-\frac{\beta + \alpha K_p}{2} \Rightarrow$ **il sistema può essere più veloce** ma presenta una risposta **oscillatoria smorzata**

Controllore Proporzionale-Integrale: Errore a Regime



$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}, \alpha, \beta > 0$$

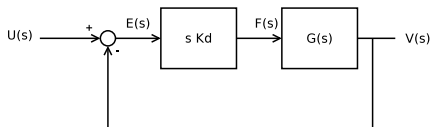
$$H_E(s) = \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s + \beta)}{s^2 + s(\beta + \alpha K_p) + \alpha K_i} = 0$$

Il controllore PI **annulla l'errore a regime!**

Controllore Derivatore

- Il controllore PI può non essere sufficiente nel caso di sistemi particolarmente “lenti” (sistemi meccanici con **elevata inerzia**).
- Il controllore PI **non può** ridurre la dinamica più di tanto senza provocare sovraelongazione e oscillazioni smorzate.
- L'aggiunta di un'azione **derivativa** sull'errore $C(s) = K_d s$ permette di agire sull'**andamento dell'errore**
- Poichè i sistemi dinamici agiscono sempre con un certo ritardo agli ingressi, l'informazione sull'andamento dell'errore permette al controllore di capire come sta evolvendo il sistema
- Un'azione basata sulla conoscenza dell'evoluzione del sistema consente di capire “in che direzione siamo andando” e pertanto **anticipare** l'azione di controllo
- Per tale motivo, i derivatori sono detti **sistemi anticipatori**

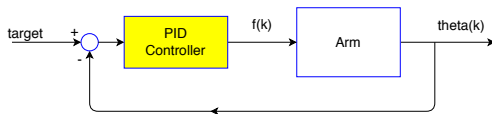
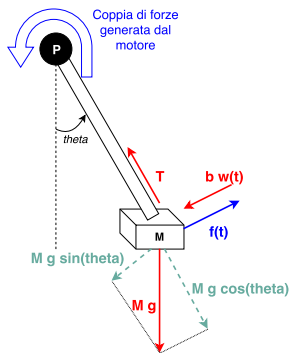


- Il **PID** è un controllore standard che include le tre azioni *proporzionale/integrale/derivativa*.
- Ogni azione è regolata da una costante K_p , K_i e K_d
- Se il valore di una costante è 0, la rispettiva azione è assente.
- La funzione di trasferimento del controllore è:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Esempio di Controllore PID

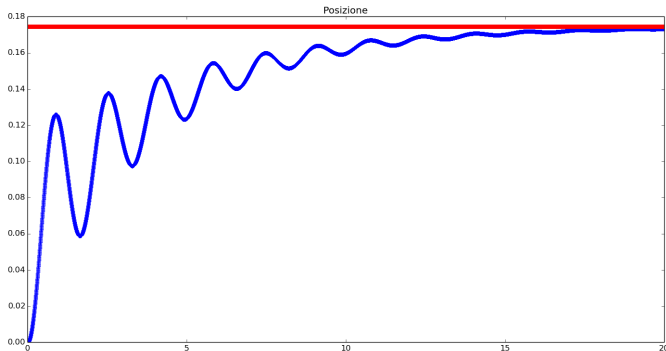
- Consideriamo il sistema del secondo ordine che modella un giunto robotico e applichiamo un PID per controllare la **posizione angolare** del giunto stesso



Controllo PI sul braccio robotico

Consideriamo il sistema del secondo ordine che modella un giunto robotico e applichiamo un PID per controllare la **posizione angolare** del giunto stesso

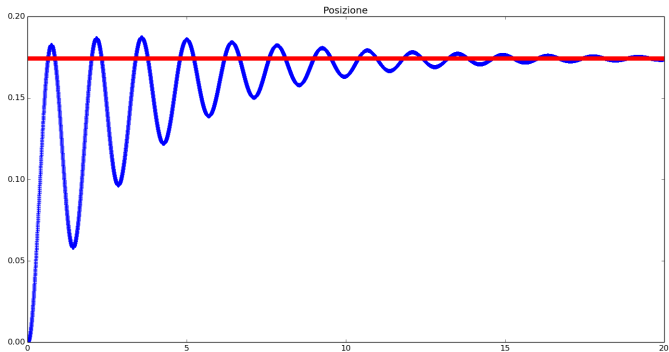
$$K_P = 30, K_I = 20$$



Controllo PI sul braccio robotico

provando ad aumentare la dinamica....

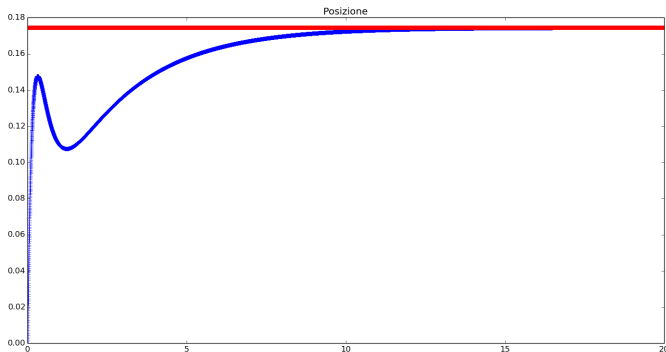
$$K_P = 60, K_I = 40$$



Controllo PID sul braccio robotico

Introducendo il termine **derivativo**

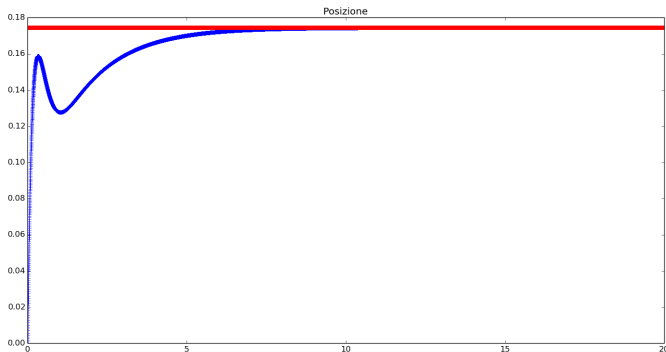
$$K_P = 60, K_I = 40, K_D = 50$$



Controllo PID sul braccio robotico

Possiamo ora provare ad aumentare ancora la **dinamica**

$$K_P = 100, K_I = 80, K_D = 50$$



Taratura Controllori PID

Taratura PID: Metodo Ziegler-Nichols

- 1 Si pone $K_i = 0$ e $K_d = 0$
- 2 Si aumenta gradualmente K_p fin quando non si porta il sistema ad oscillare, il valore raggiunto dalla costante $K_u = K_p$ è detto **guadagno critico**
- 3 Si misura il **periodo** P_u delle oscillazioni
- 4 Si impostano le costanti secondo la seguente tabella:

Tipo	K_p	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	0	0
PI	$0.45K_u$	$\frac{1.2K_p}{P_u}$	0
PID	$0.6K_u$	$\frac{2K_p}{P_u}$	$\frac{K_p P_u}{8}$

Taratura PID: Metodo Empirico

- 1 Si pone $K_i = 0$ e $K_d = 0$
- 2 Si aumenta gradualmente K_p controllando che la risposta al gradino non presenti sovraelongazioni; si effettua il test con gradini di varie ampiezze (qualora sia necessario)
- 3 Se il sistema presenta un errore a regime, si aumenta gradualmente K_i , valutando l'assenza di sovraelongazioni e/o oscillazioni e il tempo di raggiungimento del target
- 4 Se il sistema presenta delle sovraelongazioni, si adattano gradualmente K_p e K_i
- 5 Qualora sia necessario, si aumenta gradualmente K_d per migliorare la "velocità" del sistema

Analisi dei Sistemi di Controllo PID

Corrado Santoro

ARSLAB - Autonomous and Robotic Systems Laboratory

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Catania, Italy

santoro@dmi.unict.it



Programmazione Sistemi Robotici