Algebra Booleana

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica
santoro@dmi.unict.it

Corso di Architettura degli Elaboratori

Algebra Booleana

- E' un algebra inventata da George Boole nel 1847 con lo scopo di fornire un **sistema formale** per la *logica proposizionale*
- E' il fondamento sul quale operano tutti i circuiti di un calcolatore
- Definisce:
  - Un insieme di **simboli** $K = \{falso, vero\} \equiv \{0, 1\}$
  - Due **operazioni "binarie"** (con due operandi): **somma (logica)**, **prodotto (logico)**
  - Un'**operazione "unaria"** (con un operando): **negazione (logica)**
- Il comportamento delle operazioni viene definito da **tabelle di verità**

Somma Logica

$$x_1, x_2, y \in \{0, 1\}, y = x_1 + x_2$$

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- La somma logica è anche chiamata **OR** ("oppure") perchè il risultato è vero quanto è vero il primo OPPURE il secondo termine
- E' indicata con i simboli $+$, *OR*, $\vee$

Prodotto Logico

$$x_1, x_2, y \in \{0, 1\}, y = x_1 \cdot x_2$$

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Il prodotto logico è anche chiamato **AND** ("e") perchè il risultato è vero quanto il primo E il secondo termine sono veri
- E' indicato con i simboli $\cdot$, *AND*, $\wedge$ (oppure nulla)

Negazione

$$x, y \in \{0, 1\}, y = \overline{x}$$

x	$y = \overline{x}$
0	1
1	0

- La negazione logica è anche chiamata **NOT**
- E' indicato con i simboli $\overline{x}$, *NOT*, $\neg$

Proprietà degli operatori

Somma Logica

Commutativa	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
Associativa	$x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2) + x_3 =$
	$= x_1 + (x_2 + x_3)$
Idempotenza	$x + x = x$
Elemento neutro	$x + 0 = x$
Massimo	$x + 1 = 1$
Complemento	$x + \overline{x} = 1$

Proprietà degli operatori

Prodotto Logico

Commutativa	$x_1 x_2 = x_2 x_1$
Associativa	$x_1 x_2 x_3 = (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$
Idempotenza	$x\ x = x$
Elemento neutro	$x\ 1 = x$
Minimo	$x\ 0 = 0$
Complemento	$x\overline{x} = 0$

Proprietà degli operatori

Negazione Logica

Doppia negazione	$\overline{\overline{x}} = x$

Somma e Prodotto

Distributiva	$x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$
Distributiva	$x_1 + (x_2 x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$
Priorità del prodotto	$x_1 + x_2 x_3 = x_1 + (x_2 x_3)$
Assorbimento	$x_1(x_1 + x_2) = x_1$
Assorbimento	$x_1 + x_1 x_2 = x_1$

Funzioni Logiche o Booleane

Funzioni Logiche o Booleane

- Una **funzione logica o booleana** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ è un'espressione più o meno complessa che utilizza gli operatori booleani sulle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$
- Il **comportamento** di una funziona logica viene definito attraverso la relativa tabella della verità che viene derivata applicando le operazioni dell'espressione a tutte le possibili combinazioni di valori delle variabili

Esempio

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_2 x_3}$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 x_3$	$\overline{x_2 x_3}$	x_1	$x_1 + \overline{x_2 x_3}$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Teoremi di De Morgan

Teoremi di De Morgan

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \; \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \; x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\;\overline{x_2}$	$x_1 + x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Teoremi di De Morgan

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \; \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 \; x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} + \overline{x_2}$	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 x_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Sintesi di Funzioni Logiche

Sintesi di Funzioni Logiche

- Data una tabella della verità che rappresenta una certa funzione logica, **come possiamo derivare la** **funzione analitica** **equivalente?**

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f(x_1, x_2) = ??$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Somme di prodotti

- Data una tabella della verità, si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **1**
- Per ogni caso, si costruisce un **prodotto** delle n variabili (denominato **mintermine**), ogni variabile è presa così com'è se vale 1, negata se essa vale 0
- Si **sommano** tra loro i prodotti ottenuti

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$	Prodotto
0	0	1	$\overline{x_1}\ \overline{x_2}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x_1\ x_2$

$$f(x_1, x_2) = \overline{x_1}\ \overline{x_2} + x_1\ x_2$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Prodotti di somme

- Data una tabella della verità, si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **0**
- Per ogni caso, si costruisce una **somma** delle *n* variabili (denominata **maxtermine**), ogni variabile è presa così com'è se vale 0, negata se essa vale 1
- Si **moltiplicano** tra loro le somme ottenute

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$	Somme
0	0	1	
0	1	0	$x_1 + \overline{x_2}$
1	0	0	$\overline{x_1} + x_2$
1	1	1	

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + x_2)(x_1 + \overline{x_2})$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Minimizzazione

- Le regole indicate precedentemente assicurano la derivazione di una funzione che si comporta come desiderato
- Tuttavia non assicura che la funzione derivata contenga il **numero minimo di operazioni**
- La **minimizzazione** si rende necessaria per la realizzazione circuitale della funzione stessa: **meno termini** $\Rightarrow$ **meno circuiti**

Esempio di Minimizzazione

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$	Prodotti
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{x_1}\ x_2\ x_3$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1\ x_2\ \overline{x_3}$
1	1	1	1	$x_1\ x_2\ x_3$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1}\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2\ \overline{x_3} + x_1\ x_2\ x_3 = \\ &= \overline{x_1}\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2\ (\overline{x_3} + x_3) = \\ &= \overline{x_1}\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2\ 1 = \\ &= \overline{x_1}\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2 \end{aligned}$$

Mappe di Karnaugh

Sintesi di Funzioni Logiche—Mappe di Karnaugh

- Le **Mappe di Karnaugh** sono uno strumento grafico che permette la sintesi di una funzione logica in forma minima
- Sono formate da un reticolo in cui:
  - le righe e le colonne rappresentano i valori delle variabili di ingresso
  - La sequenza delle variabili deve essere tale che due righe (colonne) differiscono nel valore di una sola variabile
  - Il contenuto dei quadrati rappresenta il valore dell'uscita
- Il principio delle mappe di Karnaugh è che **due quadrati adiacenti differiscono nel valore di una sola variabile**
- Raggruppando quadrati che rappresentano la stessa uscita, è possibile identificare **quali variabili non contribuiscono** e pertanto *eliminarle* nella forma analitica

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0

Sintesi di Funzioni Logiche

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0

Sintesi di Funzioni Logiche

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	0

- Box **rosso**: x_1 varia, quindi **non contribuisce**, $x_2 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow x_2 x_3$
- Box **verde**: x_3 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

Verifica

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 + x_2 x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0

Sintesi di Funzioni Logiche

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0

- Box **rosso**: x_2 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow \overline{x_2}\ \overline{x_3}$
- Box **verde**: x_3 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \overline{x_1}\ x_2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\ x_2 + \overline{x_2}\ \overline{x_3}$$

Sintesi di Funzioni Logiche

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$x_1 x_2$

x_3	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	0	1

- Box **rosso**: x_1 varia, quindi **non contribuisce**, $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow \overline{x_2}\ x_3$
- Box **verde**: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\ x_3 + \overline{x_1}\ x_2\ \overline{x_3}$$

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

Sintesi di Funzioni Logiche

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

- Box **rosso**: x_1 e x_3 variano, $x_2 = 1 \Rightarrow x_2$
- Box **verde**: x_1 e x_2 variano, $x_3 = 1 \Rightarrow x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Algebra Booleana

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica
santoro@dmi.unict.it

Corso di Architettura degli Elaboratori