

Scritto di Calcolo Numerico del 2/10/1995

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e si voglia risolvere il sistema

$$Ax = b$$

mediante i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel. Verificare se e quale dei due metodi risulta convergente e stimare il numero di iterazioni necessarie affinché l'errore diminuisca di un fattore 10^5 rispetto al valore iniziale.

[12 punti]

2. Siano date le due funzioni $f(x)$ e $g(x) \in C^1([a, b])$, e sia $\bar{x} \in (a, b)$ un punto di intersezione delle due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Sia $f(x)$ monotona e $\Phi(x) = f^{-1}(g(x))$.

i) Mostrare che $\bar{x}$ punto fisso per $\Phi(x)$.

ii) Determinare una relazione tra le derivate $f'(\bar{x})$ e $g'(\bar{x})$ affinché $\bar{x}$ sia punto attrattivo per $\Phi(x)$.

Sia ora

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \lambda(x - \pi/2)^2, \quad \lambda > 0.$$

iii) Mostrare che le due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ hanno un solo punto di intersezione $\bar{x} \in (0, \pi/2)$.

iv) Fornire una condizione sufficiente su λ affinché il punto $\bar{x}$ sia attrattivo per $\Phi(x) = f^{-1}(g(x))$.

[10 punti]

3. Ricordando la definizione dei polinomi di Chebichev, calcolare una approssimazione dell'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

mediante la formula di Gauss-Chebichev a quattro nodi.

[8 punti]