

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

Dipartimento di Ingegneria Elettrica
Elettronica e Informatica (DIEEI)

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Appunti del corso di Fisica Matematica
Parte II: Meccanica Razionale

tenuto dal prof. V. Romano

a cura del dott. Giovanni Nastasi

Dipartimento di Matematica e Informatica

Viale A. Doria 6, 95125 Catania, Italy

e-mail: romano@dmi.unict.it

web page: <http://www.dmi.unict.it/~romano/>

Anno Accademico 2018-2019

Indice

Introduzione	iii
1 Elementi di calcolo vettoriale	1
1.1 Lo spazio fisico	1
1.2 Nozioni di base	2
1.3 Equazioni scalari ed equazioni vettoriali	6
1.4 Sistemi di vettori applicati	7
1.5 Sistemi equivalenti	11
1.6 Sistemi di vettori applicati paralleli	14
1.7 Rotazioni	17
1.8 Applicazioni lineari e cambiamenti di base	20
1.9 Analisi vettoriale	20
1.10 Curve regolari	22
1.11 Formule di Frenet	25
2 La cinematica	32
2.1 Assiomi fondamentali	32
2.2 Cinematica del punto	33
2.2.1 Moto circolare	33
2.2.2 Moto armonico	34
2.2.3 Moto elicoidale	35
2.3 Cinematica del punto vincolato	36
2.4 Vincoli olonomi semplici	37
2.5 Vincoli olonomi doppi	41
2.6 Vincoli anolonomi	42
2.7 Cinematica di un sistema di punti materiali	43
2.8 Cinematica dei continui	45
2.9 Cinematica dei rigidi	46
2.9.1 Il campo di velocità in un moto rigido	49
2.9.2 Esempi di moti rigidi particolari	54
2.9.3 Gli angoli di Eulero	55
2.9.4 Il campo di accelerazione in un moto rigido	57
2.9.5 Cinematica relativa	58
2.9.6 Moti rigidi piani	64
3 La geometria delle masse	67
3.1 Centro di massa	67

3.2	Momenti d'inerzia	69
3.2.1	Matrice d'inerzia	71
3.2.2	Formule di variazione della matrice d'inerzia	74
4	La dinamica	76
4.1	I principi della dinamica	76
4.2	La dinamica relativa	78
4.3	Dinamica del punto materiale vincolato	85
4.3.1	Dinamica di un punto vincolato ad una curva liscia	86
4.3.2	Dinamica di un punto materiale vincolato ad una superficie liscia	91
4.4	Cinematica delle masse	93
4.4.1	Momento angolare di un sistema rigido	96
4.4.2	Energia cinetica di un sistema rigido	97
4.5	Le equazioni cardinali	98
4.6	Dinamica dei sistemi vincolati	102
4.7	Equazioni cardinali della statica	107
4.8	Sistemi articolati	108
4.9	Campi conservativi	109
4.10	Equazioni di moto di Lagrange e integrali primi	112
4.11	Principio dei lavori virtuali	115

Introduzione

La *Meccanica* è lo studio del movimento, con particolare riguardo alle cause che lo determinano. La *Meccanica Razionale* affronta tale lo studio in maniera deduttiva, utilizzando metodologie matematiche, a partire da una schematizzazione assiomatica, a differenza dell'impostazione seguita nei corsi di Fisica, ove l'enfasi è posta sull'analisi dei fenomeni con procedure essenzialmente induttive.

Forse la migliore sintesi dell'impostazione *razionale* sopra esposta è quella già colta da Leonardo da Vinci: "La Meccanica è il paradiso delle scienze matematiche, perché con quella si viene al frutto matematico".

I seguenti appunti traggono spunto dai corsi da me tenuti sull'argomento per allievi ingegneri. Un doveroso ringraziamento va al dott. Giovanni Nastasi che con grande dedizione ha contribuito alla loro redazione.

Catania, 11 giugno 2019

Vittorio Romano

Capitolo 1

Elementi di calcolo vettoriale

1.1 Lo spazio fisico

Lo spazio fisico è rappresentato dallo spazio euclideo tridimensionale e sarà indicato con \mathcal{E} . Gli elementi di \mathcal{E} sono detti punti. Dati due punti $A, B \in \mathcal{E}$, sarà indicato con $A - B$ il segmento orientato che ha B come primo estremo e A come secondo estremo. La retta r su cui giace $A - B$ è detta direzione. La lunghezza euclidea di $A - B$, indicata con

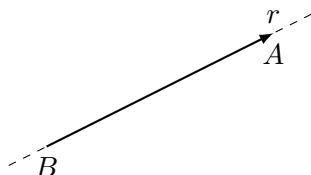


FIGURA 1.1: Segmento orientato.

\overline{AB} , prende il nome di modulo. In questo modo sono stati stabiliti il verso, la direzione e il modulo di un segmento orientato.

Considerando l'insieme dei segmenti orientati, è possibile stabilire una relazione di equivalenza, detta relazione di equipollenza, nel modo seguente. Dati due segmenti orientati $A - B$ e $A' - B'$, si dice che essi sono equivalenti e si scriverà $A - B \sim A' - B'$ se e solo se hanno la stessa direzione (cioè giacciono su rette parallele), lo stesso verso e lo stesso modulo. Fissato un segmento orientato $A - B$, l'insieme dei segmenti orientati $A' - B'$ ad esso equipollenti forma una classe di equivalenza, indicata con $[A - B]$. Ciascuna classe è un vettore di \mathbb{R}^3 che prende il nome di vettore libero e si identificherà $[A - B] = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

Osservazione 1.1.1. Il vettore \mathbf{u} definisce una traslazione di B in A , cioè si può scrivere $A = B + \mathbf{u}$.

1.2 Nozioni di base

Sull'insieme \mathbb{R}^3 è possibile stabilire un'operazione di somma in senso geometrico. Infatti, dati $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, vale la regola del parallelogramma. Inoltre è possibile stabilire anche la

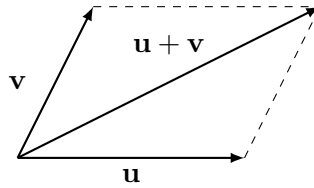


FIGURA 1.2: Regola del parallelogramma.

moltiplicazione per uno scalare: dati $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v}$ tale che

1. se $\lambda = 0$ allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
2. se $\lambda \neq 0$ allora $|\mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{u}|$, \mathbf{v} ha la stessa direzione di \mathbf{u} e inoltre se $\lambda > 0$ (risp. $\lambda < 0$) \mathbf{v} ha lo stesso verso (risp. il verso opposto) di \mathbf{u} .

In questo modo \mathbb{R}^3 con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare sopra introdotte assume la struttura di spazio vettoriale di dimensione tre e si scrive $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Definizione 1.2.1. Dicesi prodotto scalare canonico l'applicazione $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \varphi \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

dove φ è l'angolo convesso, quindi $0 \leq \varphi \leq \pi$, formato da \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Osservazione 1.2.1. A livello geometrico, calcolare il prodotto scalare tra due vettori significa prendere la componente con segno di un vettore lungo l'altro e moltiplicarla per il modulo quest'ultimo.

Proposizione 1.2.1. *Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà.*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
3. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \cos 0 = |\mathbf{u}|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

Osservazione 1.2.2. La proprietà 4, che si ottiene banalmente applicando la Definizione 1.2.1 essendo in questo caso $\varphi = 0$, ha come conseguenza immediata che $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = |\mathbf{u}|$. Inoltre, sempre dalla 4 si ha che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, cioè il prodotto scalare canonico è definito positivo.

Definizione 1.2.2. Si dice versore un vettore $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ tale che $|\mathbf{e}| = 1$.

Osservazione 1.2.3. Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ è possibile definire il versore $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ nella direzione di \mathbf{u} . Infatti,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} |\mathbf{u}|^2 = 1$$

ed \mathbf{e} è equiverso ad \mathbf{u} .

Osservazione 1.2.4. Siano dati un versore \mathbf{e} e un vettore \mathbf{u} di \mathbb{R}^3 . Il vettore \mathbf{u} si decompone in modo unico come somma di un vettore parallelo a \mathbf{e} e di uno perpendicolare a \mathbf{e} , cioè si ha

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{//} + \mathbf{u}_{\perp}, \quad \text{con } \mathbf{u}_{//} // \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}_{\perp} \perp \mathbf{e}.$$

Sia φ l'angolo che \mathbf{u} forma con \mathbf{e} . Allora si ha

$$\mathbf{u}_{//} = |\mathbf{u}| \cos \varphi \mathbf{e} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}.$$

La quantità $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$ prende il nome di componente scalare, invece $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$ si dice componente vettore. Infine, l'altro vettore della decomposizione si può calcolare per differenza, cioè $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{//}$.

Definizione 1.2.3. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 . \mathcal{B} si dice ortonormale se e solo se¹

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Osservazione 1.2.5. Un generico vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ si può decomporre come somma delle sue componenti lungo i versori di base, cioè si ha

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad \text{con } u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Osservazione 1.2.6. Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i.$$

¹ δ_{ij} rappresenta la delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Allora il loro prodotto scalare è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \end{aligned}$$

In particolare, per $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Definizione 1.2.4. Si dice prodotto vettoriale l'applicazione $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$ tale che

1. $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ allora \mathbf{w} è definito assegnando
 - (a) $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \varphi$, dove $0 \leq \varphi \leq \pi$ è l'angolo convesso formato da \mathbf{u} e \mathbf{v} .
 - (b) Se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono linearmente indipendenti allora la direzione di \mathbf{w} è quella ortogonale al piano individuato da \mathbf{u} e \mathbf{v} ; se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono paralleli allora si assegna $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.
 - (c) Il verso di \mathbf{w} si determina con la *regola della mano destra*: si prende il primo vettore con la mano destra e lo si porta a sovrapporre con il secondo vettore; la direzione del pollice fornisce il verso del vettore prodotto.

INSERIRE FIGURA

Proposizione 1.2.2. *Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà*

1. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$
2. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.
3. $(\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
4. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$

Definizione 1.2.5. Una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si dice levogira se e solo se si ha $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$.

Osservazione 1.2.7. Da questo punto in avanti si prenderanno in considerazione solo basi ortonormali levogire.

Osservazione 1.2.8. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Assegnata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, tenendo conto delle decomposizioni

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \mathbf{e}_j,$$

il prodotto vettoriale si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \left(\sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

In forma compatta, il prodotto vettoriale si ottiene calcolando formalmente il determinante

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3.$$

Osservazione 1.2.9. Il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa,

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Infatti, $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ e invece $\mathbf{e}_1 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$.

Proposizione 1.2.3. *Vale l'identità*

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Definizione 1.2.6. Dati $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ si definisce prodotto misto una qualunque delle forme

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Osservazione 1.2.10. Il prodotto misto è definito a partire dalle definizioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale già stabilite. Risulta ovvio che per effettuare il calcolo del prodotto misto si deve procedere prima calcolando il prodotto vettoriale e poi il prodotto scalare. Quindi, senza che vi sia ambiguità, è possibile indicare il prodotto misto omettendo le parentesi. Inoltre, in forma compatta si può calcolare

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Osservazione 1.2.11. Il prodotto misto si annulla se e solo se il determinante scritto precedentemente è zero e cioè se e solo se i tre vettori sono linearmente dipendenti e questo accade se e solo se essi sono complanari.

Osservazione 1.2.12. Vale la proprietà

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

Infatti eseguendo una permutazione ciclica si ha un doppio scambio di righe nel determinante e di conseguenza il segno del determinante non cambia.

1.3 Equazioni scalari ed equazioni vettoriali

Siano $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Poniamoci il problema di determinare i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b. \quad (1.3.1)$$

La (1.3.1) è detta equazione scalare. Si osservi che la quantità $\mathbf{x}^* = \frac{b}{a^2} \mathbf{a}$ è soluzione della (1.3.1) e la generica soluzione si ottiene a meno di un vettore perpendicolare ad \mathbf{a} , cioè è del tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \perp \mathbf{a}. \quad (1.3.2)$$

Si osservi che \mathbf{N} giace sul piano ortogonale ad \mathbf{a} e quindi un'equazione scalare ammette ∞^2 soluzioni. Geometricamente esso è il piano passante per \mathbf{x}^* e ortogonale ad \mathbf{a} .

Siano $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Poniamoci adesso il problema di determinare i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}. \quad (1.3.3)$$

Si ha che condizione necessaria e sufficiente affinché la (1.3.3) ammetta soluzione è che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Infatti, se (1.3.3) ammette soluzione allora il risultato di $\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$, cioè \mathbf{b} , deve essere ortogonale sia ad \mathbf{x} che ad \mathbf{a} e quindi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. D'altra parte, se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ una soluzione è data da $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{a^2}$. Infatti,

$$\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{a^2} \wedge \mathbf{a} = \frac{a^2 \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}}{a^2} = \mathbf{b}.$$

Inoltre la soluzione generale si ottiene a meno di un generico vettore parallelo ad \mathbf{a} , cioè si ha

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Poiché la soluzione è determinata a meno di un generico parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione (1.3.3) ammette ∞^1 soluzioni che rappresentano geometricamente la retta per $\hat{\mathbf{x}}$ parallela al vettore \mathbf{a} .

1.4 Sistemi di vettori applicati

Definizione 1.4.1. Siano $A \in \mathcal{E}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ un vettore libero. La coppia (A, \mathbf{v}) si dice vettore applicato e il punto A si dice punto di applicazione.

Definizione 1.4.2. L'insieme $\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ si dice sistema di vettori applicati.

Definizione 1.4.3. Si dice risultante del sistema di vettori applicati Σ il vettore libero

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i.$$

Osservazione 1.4.1. Il risultante non ha punto di applicazione.

Definizione 1.4.4. Assegnato un punto $O \in \mathcal{E}$, detto polo, si dice momento risultante di Σ il vettore libero

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N (A_i - O) \wedge \mathbf{v}_i.$$

Osservazione 1.4.2. Il momento dipende dalla scelta del polo geometrico. Si ottiene dunque un'applicazione che associa ad ogni polo O il vettore \mathbf{M}_O . Tale applicazione è un campo vettoriale, detto campo dei momenti.

Proposizione 1.4.1 (Legge di variazione del momento al variare del polo). *Dato un sistema di vettori applicati $\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ e dati due poli $O, O' \in \mathcal{E}$, vale la relazione*

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}, \quad (1.4.1)$$

dove \mathbf{R} è il risultante di Σ .

Dimostrazione. Si osservi che, applicando la regola del parallelogramma, si ha

$$A_i - O' = A_i - O + O - O',$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, N$. Allora si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^N (A_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (A_i - O + O - O') \wedge \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N (A_i - O) \wedge \mathbf{v}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.4.3. Il momento risultante \mathbf{M}_O non dipende dal polo O se e solo se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Definizione 1.4.5. Si consideri il sistema di vettori applicati $\Sigma = \{(A_1, \mathbf{v}_1), (A_2, \mathbf{v}_2)\}$ tali che $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$. In questo caso si dice che Σ è una *coppia*.

Esempio 1.4.1. Si consideri una coppia $\Sigma = \{(A_1, \mathbf{v}_1), (A_2, \mathbf{v}_2)\}$. Il risultante è dato da $\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Pertanto il momento di una coppia non dipende dal polo. Allora, scegliendo come polo uno dei due punti di applicazione, ad esempio A_2 , si ha

$$\boldsymbol{\mu} = (A_1 - A_2) \wedge \mathbf{v}_1 + (A_2 - A_2) \wedge (-\mathbf{v}_1) = (A_1 - A_2) \wedge \mathbf{v}_1,$$

in cui l'ultimo passaggio si ottiene poiché $A_2 - A_2 = \mathbf{0}$.

Proposizione 1.4.2. *Dato un sistema di vettori applicati Σ con risultante non nullo, il momento risultante di Σ non cambia rispetto ai poli che appartengono ad una medesima retta parallela al risultante.*

Dimostrazione. Dati due poli $O, O' \in \mathcal{E}$ tali che $O - O' \parallel \mathbf{R}$ si ha

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_O.$$

□

Osservazione 1.4.4. Se è noto il momento risultante \mathbf{M}_{O^*} al variare di O^* su un piano π allora si determina il momento risultante \mathbf{M}_O per ogni $O \in \mathcal{E}$. Infatti dato un polo $O \in \mathcal{E} \setminus \pi$, si consideri il polo $O^* \in \pi$ con $O - O^* \parallel \mathbf{R}$. Per la Proposizione precedente, si ha $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O^*}$.

Proposizione 1.4.3. *Dato un sistema di vettori applicati Σ con risultante $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, è possibile decomporre il momento risultante \mathbf{M}_O nella somma di un componente $\mathbf{M}_{O\parallel}$, che è parallelo ad \mathbf{R} e di un componente $\mathbf{M}_{O\perp}$ ad esso ortogonale. Inoltre $\mathbf{M}_{O\parallel} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{R^2} \mathbf{R}$ ed è invariante rispetto alla scelta del polo O e viene detto invariante vettoriale. La sua componente scalare $\mathcal{I} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{R}$ è detta invariante scalare.*

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O//} + \mathbf{M}_{O\perp} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{R^2} \mathbf{R} + \mathbf{M}_{O\perp}.$$

Per verificare che $\mathbf{M}_{O//}$ è invariante rispetto alla scelta del polo O , si consideri un altro polo O' . Allora dalla relazione (1.4.1), moltiplicando scalarmente ambo i membri per \mathbf{R} , si ottiene

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \cdot (O - O') \wedge \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O,$$

in cui l'ultimo passaggio si ottiene poiché nel prodotto misto sono presenti due vettori paralleli. Pertanto $\mathbf{M}_{O//}$ non dipende dalla scelta del polo O . \square

Osservazione 1.4.5. Poiché varia soltanto $\mathbf{M}_{O\perp}$, ci si domanda se esistono dei poli per cui $\mathbf{M}_{O\perp} = \mathbf{0}$. Inoltre per non appesantire la notazione si scriverà $\mathbf{M}_{O//} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{M}_{O\perp} = \mathbf{n}_O$.

Proposizione 1.4.4. *Sia $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$. Il luogo geometrico dei poli $O \in \mathcal{E}$ tali che $\mathbf{M}_O = \mathbf{P}$ (ovvero tali che $\mathbf{n}_O = \mathbf{0}$) è una retta parallela ad \mathbf{R} , detta asse centrale.*

Dimostrazione. Dato un generico $O \in \mathcal{E}$, si ha

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{P} + \mathbf{n}_O.$$

Considerando inoltre $O' \in \mathcal{E}$ si ottiene analogamente

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{P} + \mathbf{n}_{O'}.$$

Inoltre dalla (1.4.1), si ha

$$\mathbf{P} + \mathbf{n}_{O'} = \mathbf{P} + \mathbf{n}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R},$$

da cui

$$\mathbf{n}_{O'} = \mathbf{n}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}.$$

Imponendo che $\mathbf{n}_{O'} = \mathbf{0}$, si ottiene l'equazione vettoriale

$$(O' - O) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{n}_O,$$

in cui l'incognita è il vettore $O' - O$. Poiché $\mathbf{n}_O \cdot \mathbf{R} = 0$, l'equazione ammette soluzione e si ha

$$O' - O = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{n}_O}{R^2} + \lambda \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inoltre si osservi che

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{n}_O = \mathbf{R} \wedge (\mathbf{P} + \mathbf{n}_O - \mathbf{P}) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O - \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O,$$

essendo $\mathbf{R} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{0}$ in quanto $\mathbf{R} // \mathbf{P}$. Pertanto l'equazione dell'asse centrale diventa

$$O' - O = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{R^2} + \lambda \mathbf{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

che è l'equazione di una retta passante per il punto P^* tale che $P^* - O = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{R^2}$ e parallela ad \mathbf{R} \square

Proposizione 1.4.5. *Sia $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e sia $O \in \mathcal{E}$. O appartiene all'asse centrale se e solo se $|\mathbf{M}_O|$ è minimo.*

Dimostrazione. Dal fatto che $\mathbf{M}_O = \mathbf{P} + \mathbf{n}_O$ si ha

$$|\mathbf{M}_O|^2 = |\mathbf{P} + \mathbf{n}_O|^2 = |\mathbf{P}|^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_O + |\mathbf{n}_O|^2 = |\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{n}_O|^2 \geq |\mathbf{P}|^2, \quad (1.4.2)$$

essendo $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_O = 0$ poiché $\mathbf{P} \perp \mathbf{n}_O$. Allora O rende minima la quantità $|\mathbf{M}_O|$ se e solo se $\mathbf{n}_O = \mathbf{0}$. Per la Proposizione 1.4.4, ciò accade se e solo se O appartiene all'asse centrale. \square

Osservazione 1.4.6. Se esiste un punto $O \in \mathcal{E}$ tale che $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ allora si ha che $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Ne segue che

1. $\mathcal{I} = 0$;
2. O appartiene all'asse centrale.

Definizione 1.4.6. Dato un sistema di vettori applicati $\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ e una retta r la cui direzione è data da un versore $\hat{\mathbf{u}}$, si dice momento assiale di Σ rispetto ad r la quantità scalare

$$M_r = \mathbf{M}_O \cdot \hat{\mathbf{u}}, \quad O \in r.$$

Osservazione 1.4.7. Si verifica facilmente che la quantità M_r non dipende dalla scelta di $O \in r$. Infatti, scelto un altro punto $O' \in r$, dalla relazione 1.4.1, si ha

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_O \cdot \hat{\mathbf{u}} + (O - O') \wedge \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}},$$

ma, essendo $\mathbf{R} // \hat{\mathbf{u}}$, si ha $(O - O') \wedge \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ e pertanto M_r è costante rispetto alla scelta di $O \in r$.

1.5 Sistemi equivalenti

Definizione 1.5.1. Dati due sistemi di vettori applicati

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N_1\}, \\ \Sigma_2 &= \{(B_j, \mathbf{w}_j) : j = 1, 2, \dots, N_2\},\end{aligned}$$

si dice che Σ_1 e Σ_2 sono equivalenti e si scrive $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ se e solo se i due sistemi hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto a qualunque polo.

Osservazione 1.5.1. Se Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso risultante ed esiste un polo $O \in \mathcal{E}$ tale che Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso momento rispetto ad O allora $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$. Infatti, siano \mathbf{R}_i e $\mathbf{M}_O^{(i)}$ rispettivamente il risultante ed il momento rispetto ad O del sistema Σ_i , con $i = 1, 2$. Per ipotesi si ha $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ e $\mathbf{M}_O^{(1)} = \mathbf{M}_O^{(2)}$. Se $O' \in \mathcal{E}$ si ha

$$\mathbf{M}_{O'}^{(1)} = \mathbf{M}_O^{(1)} + (O - O') \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_O^{(2)} + (O - O') \wedge \mathbf{R}_2 = \mathbf{M}_{O'}^{(2)},$$

pertanto il momento dei due sistemi è lo stesso per ogni $O' \in \mathcal{E}$ e dunque $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$.

Proposizione 1.5.1. *Se $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ allora Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso asse centrale.*

Dimostrazione. Dall'equazione dell'asse centrale si vede che entrano in gioco solamente il risultante e il momento risultante. Essendo $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$, tali vettori sono uguali per entrambi i sistemi. Pertanto Σ_1 e Σ_2 hanno lo stesso asse centrale. \square

Proposizione 1.5.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati Σ sia equivalente ad una coppia è che si abbia $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.*

Dimostrazione. La condizione necessaria segue immediatamente dal fatto che il risultante di una coppia è nullo. Infatti, poiché per ipotesi Σ è equivalente ad una coppia, si ha che $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ perché dall'equivalenza segue che i due sistemi devono avere lo stesso risultante. Per dimostrare la condizione sufficiente, sia per ipotesi $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e sia \mathbf{M}_O il momento di Σ rispetto ad un dato polo $O \in \mathcal{E}$. Se $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ allora una qualunque coppia di braccio nullo è equivalente a Σ perché si avrebbe $A_1 - A_2 \parallel \mathbf{v}$. Se $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ si consideri un piano $\pi \perp \mathbf{M}_O$ e due punti $A_1, A_2 \in \pi$. Consideriamo la coppia data da $\{(A_1, \mathbf{v}), (A_2, -\mathbf{v})\}$ con $\mathbf{v} \parallel \pi$ da determinare. Il suo momento è dato da

$$\boldsymbol{\mu} = (A_1 - A_2) \wedge \mathbf{v},$$

indipendentemente dalla scelta del polo O . Per ottenere l'equivalenza tra i due sistemi occorre dunque che $\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\mu}$. Si perviene all'equazione vettoriale

$$(A_1 - A_2) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{M}_O,$$

che ammette soluzione in quanto $\mathbf{v} \perp \mathbf{M}_O$. □

Proposizione 1.5.3. *Dato un sistema di vettori applicati*

$$\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$$

con risultante $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$. Allora Σ è equivalente ad un solo vettore applicato se e solo se l'invariante scalare \mathcal{I} è nullo. In tal caso si ha $\Sigma \sim \{(O, \mathbf{R})\}$ con O appartenente all'asse centrale. Il vettore $\{(O, \mathbf{R})\}$ prende il nome di risultante equivalente.

Dimostrazione. Per dimostrare la condizione necessaria si supponga che $\Sigma \sim \{(O, \mathbf{v})\}$. Per l'equivalenza i due sistemi devono avere lo stesso risultante e lo stesso momento rispetto a qualunque polo. Pertanto $\mathbf{R} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{M}_O = (O - O) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Allora $\mathcal{I} = 0$ e di conseguenza $\mathbf{n}_O = \mathbf{0}$ e quindi O appartiene all'asse centrale.

Per la condizione sufficiente si supponga che $\mathcal{I} = 0$. Segue che $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ per ogni punto O dell'asse centrale. Si consideri $\Sigma' = \{(O, \mathbf{R})\}$ con O appartenente all'asse centrale. Si ha $\Sigma' \sim \Sigma$. Infatti ovviamente $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$ e $\mathbf{M}'_O = \mathbf{0} = \mathbf{M}_O$. Si osservi che di questi sistemi equivalenti ne esistono infiniti, uno per ogni punto dell'asse centrale. □

Proposizione 1.5.4. *Ogni sistema di vettori applicati Σ è equivalente ad un sistema di tre vettori applicati di cui due costituiscono una coppia.*

Dimostrazione. Fissato $O \in \mathcal{E}$ si consideri il sistema

$$\Sigma' = \{(O, \mathbf{R}), \text{coppia di momento } \mathbf{M}_O\},$$

che è un sistema di tre vettori applicati. Bisogna mostrare che $\Sigma' = \Sigma$. Si ha: $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$, perché i vettori della coppia sono opposti, e

$$\mathbf{M}'_O = (O - O) \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O.$$

□

Osservazione 1.5.2. Si osservi che la coppia non è unica e che essa giace su di un piano ortogonale a \mathbf{M}_O .

Esempio 1.5.1. Consideriamo un sistema costituito di un solo vettore applicato $\Sigma = \{(A, \mathbf{v})\}$. Prendiamo un polo $O \in \mathcal{E}$. Riduciamo Σ al polo scelto. Se O appartiene alla retta di azione di (A, \mathbf{v}) allora $\Sigma \sim \{(O, \mathbf{v})\}$ altrimenti

$$\Sigma \sim \{(O, \mathbf{v}), \text{ coppia di momento } (A - O) \wedge \mathbf{v}\}.$$

La coppia che appare viene detta *coppia di trasporto*.

Definizione 1.5.2. Un sistema di vettori applicati Σ si dice equilibrato se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ per ogni $O \in \mathcal{E}$.

Osservazione 1.5.3. Un sistema di vettori applicati Σ è equilibrato se e solo se si ha che $\Sigma \sim \{(O, \mathbf{0})\}$.

Proposizione 1.5.5 (Teorema di Varignon). *Dato il sistema*

$$\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$$

i cui vettori applicati hanno rette d'azione tutte concorrenti in un medesimo punto proprio $\Omega \in \mathcal{E}$, allora si ha che $\Sigma \sim \{(\Omega, \mathbf{R})\}$.

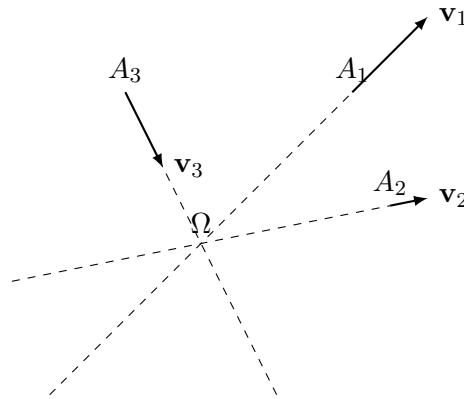


FIGURA 1.3: Teorema di Varignon nel caso $N = 3$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.5.3 basta verificare che $\mathcal{I} = 0$ e che Ω appartiene all'asse centrale. Calcolando il momento del sistema Σ rispetto a Ω , si ha

$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^N (A_i - \Omega) \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

perché $A_i - \Omega \parallel \mathbf{v}_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$. Allora $\mathcal{I} = 0$ e poiché di conseguenza deve essere $\mathbf{n}_\Omega = \mathbf{0}$ si ha che Ω appartiene all'asse centrale. \square

Definizione 1.5.3. Dato un sistema di vettori applicati $\Sigma = \{(A_i, \mathbf{v}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$, si dice che il sistema è piano se esiste un piano π tale che $A_i \in \pi$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ e inoltre $\mathbf{v}_i // \pi$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$.

Osservazione 1.5.4. Se $O \in \pi$ allora $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N (A_i - O) \wedge \mathbf{v}_i \perp \pi$. Poiché $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i$ allora $\mathbf{R} // \pi$, pertanto $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$. Di conseguenza si ha che $\mathcal{I} = 0$. Quindi si ottiene che $\Sigma \sim \{(\Omega, \mathbf{R})\}$ con Ω appartenente all'asse centrale.

Concludiamo la sezione con un sunto delle operazioni invariantive elementari:

- trasporto di un vettore lungo la propria retta di azione;
- sostituzione di due vettori aventi rette di azioni concorrenti, con il loro risultante applicato nel punto di incidenza delle rette di azione.
- scomposizione di un vettore in due vettori aventi rette di azione incidenti nel suo punto di applicazione;
- aggiunta o soppressione di coppie di braccio nullo

TABELLA 1.1: Scema riassuntivo dei casi di equivalenza di sistemi di vettori applicati

Caso	Riduzione
$\mathbf{R} = \mathbf{0}$	Il momento non dipende dal polo
$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e $\mathcal{I} = 0$	Il sistema ammette risultante equivalente
$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ e $\mathcal{I} \neq 0$	Il sistema è equivalente ad vettore applicata più una coppia

1.6 Sistemi di vettori applicati paralleli

Definizione 1.6.1. Un sistema del tipo $\Sigma = \{(A_i, \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\}$, dove $\hat{\mathbf{e}}$ è un fissato versore e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$, si dice *sistema di vettori applicati paralleli*.

Osservazione 1.6.1. Nel caso dei sistemi di vettori applicati paralleli, il risultante è dato da

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N (\lambda_i \hat{\mathbf{e}}) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \hat{\mathbf{e}}.$$

Fissato $O \in \mathcal{E}$, il momento risultante rispetto ad O si ottiene da

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O) \wedge \hat{\mathbf{e}}.$$

Sia $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$. Ciò accade se e solo se $\sum_{i=1}^N \lambda_i \neq 0$. Allora l'invariante scalare sarà

$$\mathcal{I} = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R} = \frac{1}{R} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O) \wedge \hat{\mathbf{e}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right) \hat{\mathbf{e}}.$$

Quindi, essendo ovviamente $\hat{\mathbf{e}} // \hat{\mathbf{e}}$, si ha che $\mathcal{I} = 0$. Di conseguenza, per la Proposizione 1.5.3, $\Sigma \sim \{(O, \mathbf{R})\}$ con O appartenente all'asse centrale.

Definizione 1.6.2. Dato un sistema di vettori applicati paralleli

$$\Sigma = \{(A_i, \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\},$$

dove $\hat{\mathbf{e}}$ è un versore e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$, fissato $O \in \mathcal{E}$, si dice centro di Σ il punto $C \in \mathcal{E}$ definito da

$$C - O = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O).$$

Proposizione 1.6.1. *Dato un sistema di vettori applicati paralleli*

$$\Sigma = \{(A_i, \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\},$$

dove $\hat{\mathbf{e}}$ è un versore e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$, avente $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, valgono i seguenti fatti.

1. Il punto C non dipende dalla scelta del polo $O \in \mathcal{E}$.
2. Il punto C appartiene all'asse centrale per ogni versore $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. 1. Sia $O' \in \mathcal{E}$ un altro polo. Allora in questo caso il centro sarebbe definito da

$$\begin{aligned} C' - O' &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O') = \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O + O - O') = \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - O) + \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} (O - O') \sum_{i=1}^N \lambda_i = \\ &= C - O + O - O' = C - O'. \end{aligned}$$

Da cui ne segue che deve essere $C' = C$.

2. Il momento risultante rispetto a C è

$$\mathbf{M}_C = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - C) \right) \wedge \hat{\mathbf{e}}.$$

Si osservi che

$$\mathbf{0} = C - C = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - C)$$

e ciò si verifica se e solo se

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i - C) = \mathbf{0},$$

in quanto $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$. Pertanto si ha che $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ per ogni versore $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$. Allora il punto C appartiene all'asse centrale per ogni versore $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$.

□

Proposizione 1.6.2. *Dato un sistema di vettori applicati paralleli*

$$\Sigma = \{(A_i, \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\},$$

dove $\hat{\mathbf{e}}$ è un versore e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ avente $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, si hanno i seguenti fatti.

1. Considerato il sistema $\Sigma' = \{(A_i, \alpha \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha che Σ e Σ' hanno lo stesso centro.
2. Se tutti i punti A_i giacciono su di uno stesso piano (rispettivamente su di una medesima retta) allora in centro cade sul medesimo piano (rispettivamente sulla medesima retta).
3. Vale la proprietà distributiva, cioè se $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ con $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e supponendo che esistano C_1 centro di Σ_1 e C_2 centro di Σ_2 , si ha che il centro C di Σ coincide con il centro del sistema $\{(C_1, \mathbf{R}_1), (C_2, \mathbf{R}_2)\}$, dove \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 sono i centri rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 , avendo supposto che $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{0}$. Inoltre se $\Sigma_1 = \{(A_i, \lambda'_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N_1\}$ e $\Sigma_2 = \{(B_j, \lambda''_j \hat{\mathbf{e}}) : j = 1, 2, \dots, N_2\}$ con $\lambda'_i \in \mathbf{R}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N_1$ e $\lambda''_j \in \mathbf{R}$ per ogni $j = 1, 2, \dots, N_2$, allora il punto C è dato da

$$C - O = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_1} \lambda'_i + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda''_j} \left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} \lambda'_i \right) (C_1 - O) + \left(\sum_{j=1}^{N_2} \lambda''_j \right) (C_2 - O) \right].$$

4. Se il sistema è del tipo $\Sigma = \{(A_i, \lambda_i \hat{\mathbf{e}}) : i = 1, 2, \dots, N\}$ con $\lambda_i \in \mathbf{R}$ e di medesimo segno per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ allora C appartiene all'involucro convesso contenente i punti A_1, A_2, \dots, A_N (cioè l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti gli A_i , ovvero il più piccolo insieme convesso contenente i punti A_1, A_2, \dots, A_N).

Osservazione 1.6.2. Assegnato un vettore \mathbf{e} e posto $\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}$ e $\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}$ con $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, si consideri il sistema di vettori applicati $\Sigma = \{(A_1, \mathbf{v}_1), (A_2, \mathbf{v}_2)\}$, schematizzato in Figura 1.4. In questo caso, l'involucro convesso è dato dal segmento $[A_1, A_2]$. Scelto

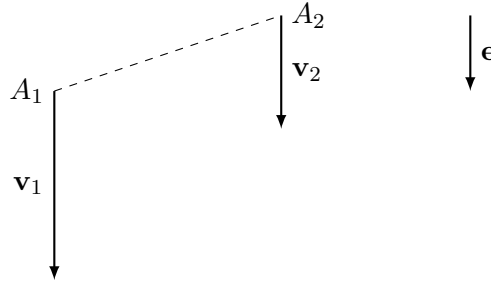


FIGURA 1.4: Schematizzazione del sistema descritto nell'Osservazione 1.6.2.

come polo il punto A_1 , si ha

$$C - A_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [\lambda_1(A_1 - A_1) + \lambda_2(A_2 - A_1)] = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (A_2 - A_1),$$

con $0 \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq 1$. Pertanto C cade all'interno del segmento $[A_1, A_2]$. Analogamente

$$C - A_2 = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [\lambda_1(A_1 - A_2) + \lambda_2(A_2 - A_2)] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (A_1 - A_2),$$

con $0 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq 1$. Calcolando il rapporto tra le lunghezze dei due segmenti determinati da C si ha

$$\frac{|C - A_2|}{|C - A_1|} = \frac{\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| |A_1 - A_2|}{\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| |A_2 - A_1|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Di conseguenza il punto C si trova più vicino al vettore di modulo maggiore.

1.7 Rotazioni

Siano date due basi di \mathbb{R}^3 ortonormali levogire $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. I vettori di \mathcal{B}' possono essere espressi come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} , cioè

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j.$$

Allora, definendo la matrice R le cui componenti sono date da $R_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$, si ha che

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}_j.$$

Viceversa, esprimendo i vettori di \mathcal{B} come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}' si ottiene

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 R_{ji}^T \mathbf{e}'_i,$$

cioè il cambiamento di base inverso si ottiene utilizzando la matrice trasposta.

Osservazione 1.7.1. Si ha che $R^T R = I$. Infatti

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \left(\sum_{h=1}^3 R_{ih}^T \mathbf{e}'_h \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 R_{jk} \mathbf{e}'_k \right) = \sum_{h,k=1}^3 R_{ih}^T R_{jk} \mathbf{e}'_h \cdot \mathbf{e}'_k = \\ &= \sum_{h,k=1}^3 R_{ih}^T R_{jk} \delta_{hk} = \sum_{h=1}^3 R_{ih}^T R_{jh} = \sum_{h=1}^3 R_{ih}^T R_{hj} = (R^T R)_{ij}. \end{aligned}$$

Pertanto $R^T R = I$, cioè R^T è l'inversa sinistra della matrice R . Analogamente, partendo da $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ si ottiene $RR^T = I$. In definitiva R risulta invertibile e si ha che $R^{-1} = R^T$. Per quanto riguarda il calcolo del determinante si ha

$$\det(I) = \det(R^T R) = \det(RR^T) = \det(R) \det(R^T) = (\det(R))^2,$$

poiché $\det(R) = \det(R^T)$, e quindi $\det(R) = \pm 1$.

Osservazione 1.7.2. L'insieme delle matrici $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tali che $RR^T = R^T R = I$ forma un gruppo rispetto all'operazione di prodotto tra matrici.

Definizione 1.7.1. Il gruppo delle matrici $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tali che $RR^T = R^T R = I$ è detto *gruppo ortogonale di \mathbb{R}^3* e si indica con $O(3)$. Gli elementi di $O(3)$ vengono detti matrici di rotazione.

Osservazione 1.7.3. Si consideri la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si osservi che R è una matrice di rotazione con $\det(R) = -1$. Essa è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a quella $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$. Tuttavia la base \mathcal{B}' non è levogira. Con questo esempio si mostra che una matrice di rotazione con $\det(R) = -1$ ammette cambiamenti di base in basi che non sono levogire. Più in generale, le matrici

$R \in O(3)$ con $\det(R) = -1$ invertono il carattere levogiro della base; le matrici $R \in O(3)$ con $\det(R) = 1$ invece preservano il carattere levogiro della base.

Definizione 1.7.2. L'insieme delle matrici $R \in O(3)$ con $\det(R) = 1$ forma un sottogruppo di $O(3)$, detto *gruppo ortogonale speciale* (o *gruppo delle rotazioni proprie*) e viene indicato con $SO(3)$.

Osservazione 1.7.4. Dalla condizione $\sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{kj}^T = \delta_{ij}$, valida per ogni $R \in O(3)$, deriva che matrici di rotazione hanno solo 3 componenti indipendenti.

Esempio 1.7.1. Rotazione attorno ad un asse.

Supponiamo per fissare le idee di ruotare attorno al terzo asse di un angolo θ . Si passa dalla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. I vettori della base \mathcal{B} vengono espressi tramite la base \mathcal{B}' come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \theta \mathbf{e}'_1 - \sin \theta \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_2 &= \sin \theta \mathbf{e}'_1 + \cos \theta \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}'_3. \end{aligned}$$

La corrispondente matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i)$, ove i indica l'applicazione identica, è data dalla matrice di rotazione

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(i) = R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i))^T.$$

Dato un vettore \mathbf{v} e una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, indicheremo con $[\mathbf{v}]$ le componenti di \mathbf{v} rispetto a tale base. Possiamo riguardare le matrici di $SO(3)$ come associate ad una trasformazione lineare nel seguente modo. Data una matrice $R \in SO(3)$, definiamo l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita tramite le componenti da

$$[f(\mathbf{u})] = R[\mathbf{u}] \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{nella base } \mathcal{B}.$$

Tale applicazione viene detta *rotazione attiva* in quanto non è la base a cambiare ma è il vettore che viene ruotato secondo la matrice R .

Ad esempio una rotazione attiva attorno al terzo asse è data dall'applicazione lineare

avente come matrice rispetto ad una base in cui \mathbf{e}_3 resta fisso

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in quanto $[f(\mathbf{e}_1)] = [\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0]^T$, $[f(\mathbf{e}_2)] = [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0]^T$, $[f(\mathbf{e}_3)] = [0, 0, 1]^T$.

Si osservi che f ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Tale proprietà è in realtà valida in generale, come espresso dalla proprietà seguente, nota come teorema di Eulero.

Proposizione 1.7.1. *Sia $R \in O(3)$ con $R \neq I$. Allora R ammette $\lambda = 1$ come autovalore semplice, cioè esiste una retta per l'origine, detta asse di rotazione, che viene lasciata fissa da R .*

1.8 Applicazioni lineari e cambiamenti di base

Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormale levogira, sia $A = [f]_{\mathcal{B}}$ la matrice associata alla f rispetto a tale base, cioè la matrice le cui colonne sono le componenti delle immagini dei vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ espresse nella stessa base.

Sia $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ una seconda base ortonormale levogira e sia $A' = [f]_{\mathcal{B}'}$ la matrice associata alla f rispetto alla nuova base. Dall'algebra lineare è noto che²

$$A' = RAR^T,$$

avendo indicato con R la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i)$.

1.9 Analisi vettoriale

Si consideri un'applicazione che associa al parametro $t \in \mathbb{R}^+$ il vettore $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$. Una tale funzione è detta funzione vettoriale. Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ è possibile scrivere la sua rappresentazione in componenti, cioè

$$\mathbf{v}(t) = v_1(t)\mathbf{e}_1 + v_2(t)\mathbf{e}_2 + v_3(t)\mathbf{e}_3.$$

²Nei testi di algebra lineare solitamente la relazione tra A e A' viene scritta come

$$A' = P^{-1}AP,$$

ove $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(i)$. Nel nostro caso $P = R^T$.

Definizione 1.9.1. Si definisce derivata di una funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ la quantità

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv_1(t)}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dv_2(t)}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dv_3(t)}{dt}\mathbf{e}_3.$$

Definizione 1.9.2. Si definisce integrale di una funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ definito nell'intervallo $[t_1, t_2]$ la quantità

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} v_1(t) dt \right) \mathbf{e}_1 + \left(\int_{t_1}^{t_2} v_2(t) dt \right) \mathbf{e}_2 + \left(\int_{t_1}^{t_2} v_3(t) dt \right) \mathbf{e}_3.$$

Proposizione 1.9.1. Assegnate due funzioni vettoriali $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ al variare di $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, valgono le seguenti identità

1. $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$
2. $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \wedge \mathbf{v}(t)) = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \wedge \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \wedge \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$

Dimostrazione. La verifica si esegue componente per componente. □

Proposizione 1.9.2. Assegnata una funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$, definita per ogni $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, tale che $|\mathbf{u}(t)| = \text{cost}$, si ha

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot \mathbf{u}(t) = 0 \quad \left(\text{o equiv.} \quad \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \perp \mathbf{u}(t) \right).$$

Dimostrazione. Si consideri $|\mathbf{u}(t)|^2 = \text{cost}$. Allora si ha anche $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = \text{cost}$. Di conseguenza si ottiene

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t)) = 2 \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \cdot \mathbf{u}(t).$$

□

Osservazione 1.9.1. Se $|\mathbf{u}(t)| = \text{cost}$ allora $\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}$ giace sul piano ortogonale a $\mathbf{u}(t)$.

Definizione 1.9.3. Sia $\Omega \subset \mathcal{E}$ un insieme aperto. Si dice campo vettoriale un'applicazione \mathbf{v} che associa

$$P \in \Omega \longmapsto \mathbf{v}(P) \in \mathbb{R}^3.$$

Osservazione 1.9.2. A differenza delle funzioni vettoriali, nei campi vettoriali il vettore associato dipende da P , ovvero dalle sue tre coordinate e si quindi

$$\mathbf{v}(P) = v_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + v_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + v_3(x, y, z)\mathbf{e}_3.$$

Definizione 1.9.4. Si chiama gradiente l'operatore ∇ definito da

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3.$$

Definizione 1.9.5. Assegnata una funzione $f \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ si chiama gradiente di f la quantità

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_3.$$

Definizione 1.9.6. Sia $\mathbf{v}(P)$ con $P \in \Omega$ un campo vettoriale. Si definisce divergenza di $\mathbf{v}(P)$ la quantità

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(P) = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z}.$$

Definizione 1.9.7. Si definisce laplaciano l'operatore

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1.10 Curve regolari

Una curva regolare è una funzione $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni valore del parametro $t \in [a, b]$ il punto $P(t) \in \mathbb{R}^3$. Fissato un sistema di riferimento $Ox_1x_2x_3$, le coordinate di $P(t)$ si esprimono nella forma $P(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

Definizione 1.10.1. Data una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, si chiama sostegno di φ l'insieme

$$\Gamma = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Definizione 1.10.2. Una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice regolare se $x_i \in C^1([a, b])$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e vale

$$(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + (x'_3(t))^2 = |\varphi'(t)|^2 > 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Osservazione 1.10.1. Si consideri un cambiamento di variabile $\psi(\tau) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ tale che $t = \psi(\tau)$ con ψ invertibile. Allora è possibile riparametrizzare la curva e si ha

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\psi(\tau)), \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta].$$

Se esiste ψ' e si ha $\psi'(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$ allora il cambiamento di variabile è ammissibile e preserva l'orientamento della curva.

Definizione 1.10.3. Data una curva regolare $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, fissato $P_0 = \varphi(t_0)$ con $t_0 \in [a, b]$, si definisce lunghezza di φ su un intervallo $[t_0, t_1]$ la lunghezza dell'arco

$\overline{P(t_0)P(t_1)}$ e definita da

$$L_{\overline{P(t_0)P(t_1)}} = \int_{t_0}^{t_1} |\varphi'(r)| \, dr.$$

Definizione 1.10.4. Data una curva regolare $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si definisce ascissa curvilinea la funzione

$$s(t) = L_{\overline{P(t_0)P(t)}} = \int_{t_0}^t |\varphi'(r)| \, dr.$$

Osservazione 1.10.2. La parametrizzazione definita tramite l'ascissa curvilinea è ammissibile. Infatti, si ha

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\varphi'(t)| > 0.$$

Pertanto il cambiamento di variabile $t \leftrightarrow s$ è ammissibile e preserva l'orientamento della curva.

Definizione 1.10.5. Data una curva regolare $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, si definisce vettore tangente alla curva φ in t la quantità

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}.$$

Osservazione 1.10.3. Il vettore tangente può essere espresso anche nella forma

$$\frac{dP(t)}{dt} = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)).$$

Inoltre, parametrizzando mediante l'ascissa curvilinea si ha

$$\frac{dP(s)}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds} = \varphi'(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Allora $\left| \frac{dP(s)}{ds} \right| = 1$.

Definizione 1.10.6. Il versore $\mathbf{t}(s) = \frac{dP(s)}{ds}$ prende il nome di versore tangente.

Definizione 1.10.7. Si definisce piano normale alla curva in $P(t)$ il piano passante per $P(t)$ e ortogonale a $\frac{dP(t)}{dt}$.

Definizione 1.10.8. Data una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice che φ è biregolare se è regolare, esiste $\varphi''(t)$ continua per ogni $t \in [a, b]$ e vale $\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in [a, b]$.

Osservazione 1.10.4. Data una curva biregolare φ , i vettori $\varphi'(t)$ e $\varphi''(t)$ sono non nulli e non paralleli, quindi sono linearmente indipendenti e individuano un piano. In generale una curva nello spazio non appartiene ad un piano. Dato un punto $P(t) = \varphi(t)$, si vuole determinare un piano tale che localmente la curva si possa riguardar come piana, ovvero il piano che localmente meglio approssima la curva.

Si consideri il piano passante per $P(t)$ e parallelo a $P'(t)$ e $P'(t + \Delta t)$. Esso è individuato dai punti $Q \in \mathcal{E}$ tali che

$$(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P'(t + \Delta t) = 0.$$

Allora vale

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P'(t + \Delta t)] = 0.$$

Considerando lo sviluppo in serie di Taylor di $P'(t + \Delta t)$,

$$P'(t + \Delta t) = P'(t) + P''(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

e sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot (P'(t) + P''(t)\Delta t + o(\Delta t))] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P'(t)] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P''(t)\Delta t] + \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = \\ &= (Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P''(t), \end{aligned}$$

in cui nell'ultimo passaggio il primo termine della somma è nullo perché $P'(t) \parallel P'(t)$ mentre il terzo termine è nullo in quanto $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Definizione 1.10.9. Data una curva biregolare φ , il piano individuato dai punti $Q \in \mathcal{E}$ tali che

$$(Q - P(t)) \wedge P'(t) \cdot P''(t) = 0$$

si chiama *piano osculatore* della curva φ in $P(t)$.

Si prova che in un intorno del generico punto $P(t)$ della curva il piano osculatore è il piano a distanza minima dai punti della curva. Infatti sia π un generico piano per il punto $P(t_0)$ della curva. Detta ν la normale del generico di tali piani, in un intorno la distanza tra un generico punto $P(t)$ della curva e uno di tali piani è data da

$$|(P(t) - P(t_0)) \cdot \nu| = \left| \left(P'(t)\Delta t + \frac{1}{2}P''(t)(\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2) \right) \cdot \nu \right|$$

che si annulla a meno dei termini di ordine $o((\Delta t)^2)$ se e solo se

$$P'(t) \cdot \nu = P''(t) \cdot \nu = 0$$

ovvero se il piano coincide con quello osculatore.

Pertanto la curva si può riguardare localmente come piana e giacente sul piano osculatore. Ovviamente nel casi di curve piane il piano osculatore coincide con il piano contenente la curva.

Osservazione 1.10.5. Poiché $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ allora si ha che $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ e di conseguenza $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ appartiene al piano normale. Inoltre, sia Q^* un punto appartenente al piano normale, cioè $Q^* - P(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$. Allora si ha

$$(Q^* - P(s)) \wedge \mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = 0$$

e pertanto $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ appartiene anche al piano osculatore.

Definizione 1.10.10. Data una curva biregolare φ , la direzione di $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ si chiama direzione normale principale di φ in $P(s)$.

1.11 Formule di Frenet

Data una curva biregolare φ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s , sia $P(s)$ il generico punto di φ . Indichiamo con $\mathbf{n}(s)$ il versore della direzione individuata dalla intersezione del piano normale e del piano osculatore orientato nel verso della concavità della curva in $P(s)$ (il verso della concavità risulta ben definito perché localmente la curva si può riguardare come piana e giacente sul piano osculatore). Sia θ l'angolo che il versore $\mathbf{n}(s)$ forma con il vettore $P(s + \Delta s) - P(s)$. Per la scelta del verso di $\mathbf{n}(s)$ si ha che $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (AGGIUNGERE FIGURA) e di conseguenza si ha che

$$\mathbf{n}(s) \cdot (P(s + \Delta s) - P(s)) \geq 0.$$

Dallo sviluppo in serie di Taylor

$$P(s + \Delta s) - P(s) = P(s) + \frac{dP(s)}{ds} \Delta s + \frac{d^2P(s)}{ds^2} \frac{(\Delta s)^2}{2} + o((\Delta s)^2) - P(s),$$

si ha

$$\mathbf{n}(s) \cdot \left(\mathbf{t}(s) \Delta s + \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \frac{(\Delta s)^2}{2} + o(\Delta s) \right) \geq 0.$$

Poiché $\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$, dividendo per $(\Delta s)^2$ e passando al limite per $\Delta s \rightarrow 0^+$, si ha

$$\mathbf{n}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \geq 0.$$

Da quest'ultimo fatto e dato che $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \cdot \mathbf{t}(s) = 0$, si ha dunque che $\mathbf{n}(s)$ e $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ sono paralleli e concordi. Pertanto si ottiene

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{n}(s), \quad (1.11.1)$$

con $\rho(s) > 0$. La 1.11.1 prende il nome di prima formula di Frenet. La quantità $1/\rho$ è detta curvatura e ρ si chiama raggio di curvatura di φ in $P(s)$.

Esempio 1.11.1. Curvatura della circonferenza.

In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ è assegnata una circonferenza di centro l'origine e raggio R posta sul piano orizzontale $z = 0$. Si consideri un punto P della circonferenza le cui coordinate sono espresse in forma polare, cioè $P(\vartheta) = (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, 0)$ e si ponga inoltre $P_0 = P(0)$. Il sistema è rappresentato in Figura 1.5. Per calcolare la

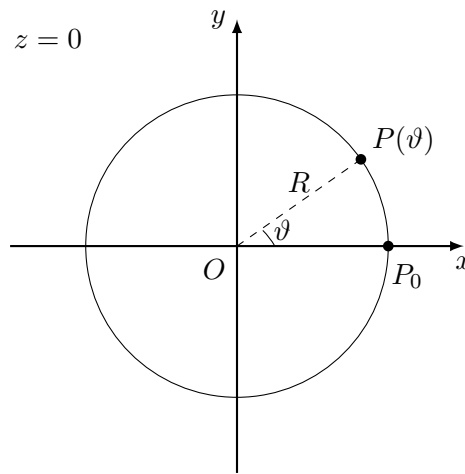


FIGURA 1.5: Circonferenza nel piano $z = 0$.

curvatura si consideri

$$\frac{dP(\vartheta)}{d\vartheta} = (-R \sin \vartheta, R \cos \vartheta, 0), \quad \frac{d^2P(\vartheta)}{d\vartheta^2} = (-R \cos \vartheta, -R \sin \vartheta, 0).$$

L'ascissa curvilinea sarà allora

$$s(\vartheta) = \int_0^\vartheta \left| \frac{d^2P(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right| d\vartheta = \int_0^\vartheta \sqrt{R^2 \cos^2 \vartheta + R^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = R\vartheta.$$

Quindi, prendendo $s(\vartheta)$ come ascissa curvilinea, si ha che $\vartheta = s/R$ e pertanto

$$P(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, 0 \right).$$

Allora il versore tangente sarà

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dP}{ds} = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0 \right)$$

mentre il versore nella direzione principale e nel verso della concavità della curva è dato da

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}, 0 \right).$$

Infine, calcolando

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, 0 \right) = \frac{1}{R} \mathbf{n}(s),$$

da cui si ottiene il raggio di curvatura $\rho = R$.

Definizione 1.11.1. Data una curva biregolare φ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s , il vettore $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ prende il nome di binormale alla curva φ in $P(s)$.

Definizione 1.11.2. Data una curva biregolare φ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s , il sistema di riferimento di centro $P(s)$ e avente come vettori di base $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ prende il nome di triedro di Frenet.

Osservazione 1.11.1. Il triedro di Frenet è un sistema di riferimento adattato alla curva.

Si consideri ancora la curva biregolare φ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s e sia $P(s)$ il generico punto di φ . Resta definito il triedro di Frenet $P(s)$, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$. Poiché $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 1$ si ha che

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \perp \mathbf{b}(s).$$

Inoltre

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \mathbf{t}(s) \wedge \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds},$$

in cui l'ultimo passaggio si ottiene dalla (1.11.1). Poiché

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} \perp \mathbf{n}(s)$$

allora $\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds}$ risulta parallelo al piano individuato da $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, pertanto esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dipendenti da s , tali che

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \alpha \mathbf{t}(s) + \beta \mathbf{b}(s).$$

In definitiva si ha

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \mathbf{t}(s) \wedge (\alpha \mathbf{t}(s) + \beta \mathbf{b}(s)) = \alpha \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \beta \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{b}(s) = -\beta \mathbf{n}(s).$$

Allora il vettore $\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds}$ ha componenti solo lungo $\mathbf{n}(s)$ e il parametro $\tau = -\beta$ prende il nome di torsione e non è definito in segno. La relazione

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \tau(s) \mathbf{n}(s) \tag{1.11.2}$$

è detta terza formula di Frenet.

Osservazione 1.11.2. Se φ è una curva piana allora il vettore $\mathbf{b}(s)$ è costante e di conseguenza $\tau(s) = 0$.

Si consideri nuovamente la curva biregolare φ , parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea s , sia $P(s)$ il generico punto di φ e sia $P(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ il triedro di Frenet. Si può ottenere facilmente per la derivata di $\mathbf{n}(s)$ come segue

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)) = \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \\ &= \tau(s)\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

La relazione

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{t}(s) \quad (1.11.3)$$

prende il nome di seconda formula di Frenet.

Riassumendo le formule di Frenet si ottiene il sistema

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{n}(s), \quad (1.11.4)$$

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\mathbf{t}(s), \quad (1.11.5)$$

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \tau(s)\mathbf{n}(s) \quad (1.11.6)$$

Esempio 1.11.2. Elica cilindrica.

L'elica cilindrica è una curva sgemba ottenuta avvolgendo una retta attorno ad un cilindro di raggio R con angolo costante (es. molla, filettatura di una vite, ecc.), rappresentata in Figura 1.6. La minima distanza tra due punti dell'elica che stanno sulla stessa verticale è detta passo dell'elica, qui indicata con a . Le coordinate di un punto P dell'elica possono

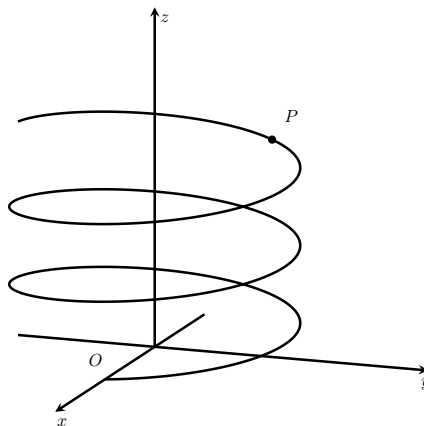


FIGURA 1.6: Elica cilindrica.

essere espresse in forma parametrica mediante il parametro $\varphi \geq 0$ tramite le relazioni

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = a\varphi \end{cases}$$

con R ed a costanti positive. Per determinare l'ascissa curvilinea bisogna calcolare

$$\frac{dP(\varphi)}{d\varphi} = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, a),$$

da cui

$$\left| \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} \right| = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}.$$

Pertanto l'ascissa curvilinea sarà

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \left| \frac{dP(\varphi')}{d\varphi'} \right| d\varphi' = \int_0^\varphi \sqrt{R^2 + a^2} d\varphi' = \sqrt{R^2 + a^2} \varphi.$$

Quindi si ha che

$$\varphi = \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}},$$

e

$$P(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \frac{as}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right).$$

Il versore tangente è dato da

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dP(s)}{ds} = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right),$$

da cui

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \left(-\frac{R}{R^2 + a^2} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, -\frac{R}{R^2 + a^2} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, 0 \right).$$

Quindi il versore nella direzione principale e nel verso della concavità della curva, poiché $\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0$, è dato da

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}, 0 \right).$$

In definitiva si ha

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}(s), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2 + a^2},$$

pertanto l'elica cilindrica ha curvatura costante. Infine il versore binormale è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} & \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}, \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \right), \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \left(\frac{a}{R^2+a^2} \cos \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}, \frac{a}{R^2+a^2} \sin \frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}, 0 \right).$$

Allora si ha

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \tau \mathbf{n}(s), \quad \tau = -\frac{a}{R^2+a^2},$$

quindi l'elica cilindrica ha torsione costante e, in questo caso, negativa.

Proiettando i punti dell'elica sul piano Oxz sia α l'angolo che il versore tangente \mathbf{t} forma con la direzione \mathbf{e}_3 dell'asse z , come mostrato in Figura 1.7. Si osservi che

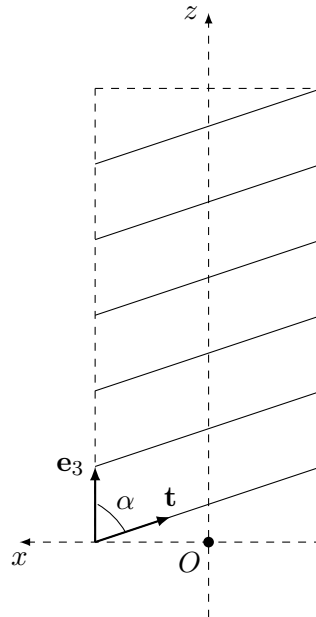


FIGURA 1.7: Proiezione dell'elica cilindrica sul piano Oxz .

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} = \cos \alpha = \text{cost.}$$

e pertanto

$$\frac{a^2}{R^2+a^2} = \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad a^2(1 - \cos^2 \alpha) = R^2 \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad a = R \cot \alpha.$$

Percorrendo un giro completo attorno all'asse z si ha $\Delta\varphi = 2\pi$ e dunque, indicando con Δz il passo dell'elica si ottiene infine

$$\Delta z = a\Delta\varphi = 2\pi R \cot \alpha.$$

Capitolo 2

La cinematica

2.1 Assiomi fondamentali

La cinematica è la branca della meccanica che studia il movimento senza tenere conto delle cause che lo generano. Per procedere con la descrizione introduciamo un osservatore dotato di un orologio per la misura dei tempi e di un regolo per la misura delle distanze. Da un punto di vista matematico l'osservatore viene identificato con un sistema di riferimento ortonormale levogiro $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. In dicheremo con t la variabile temporale.

Lo spazio fisico della meccanica classica è caratterizzato dai seguenti assiomi:

1. è *omogeneo*, cioè non esistono punti privilegiati;
2. è *isotropo*, cioè non esistono direzioni privilegiate.
3. *le lunghezze e gli intervalli di tempo sono invarianti* rispetto al cambio di osservatore, a meno di cambiamenti delle unità di misura e dell'origine dei tempi.

A seconda dei casi, un sistema fisico può essere schematizzato matematicamente in vari modi. Nel seguito si prenderanno in esame i seguenti schemi:

1. *Punto materiale*: si trascurano le dimensioni del corpo rispetto alle lunghezze tipiche del moto.
2. *Sistema di punti materiali*: si considerano più corpi le cui dimensioni sono trascurabili rispetto alle lunghezze tipiche del moto.
3. *Schema continuo*: si modella il corpo come costituito da punti materiali distribuiti con continuità in un volume dello spazio.

2.2 Cinematica del punto

Sia P un punto materiale. Assegnato il sistema di riferimento ortonormale levogiro $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, sia $P(t)$ la posizione del punto materiale al variare del tempo. Esplicitamente

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \geq 0.$$

La funzione $P(t)$ è detta legge oraria e mostra come vengono occupate le posizioni al variare del tempo. L'insieme $\{P(t) : t \geq t_0\}$ è detto traiettoria del punto.

Definizione 2.2.1. Si definisce velocità del punto $P(t)$ il vettore

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Definizione 2.2.2. Si definisce accelerazione del punto $P(t)$ il vettore

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2P(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

Osservazione 2.2.1. Se la traiettoria è una curva regolare, allora introducendo l'ascissa curvilinea si ha

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}\mathbf{t}(P(s)),$$

dove \dot{s} è la velocità scalare, e

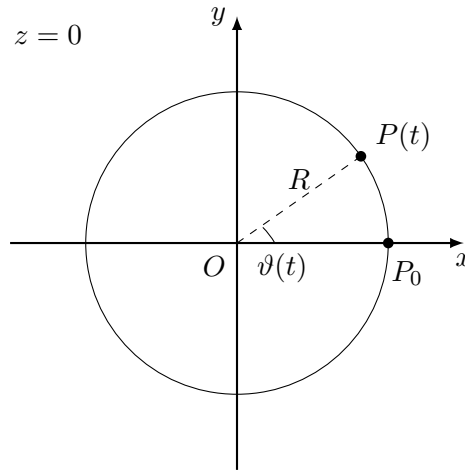
$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt} (\dot{s}\mathbf{t}(P(s))) = \ddot{s}\mathbf{t}(P(s)) + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}(P(s))}{dt} = \ddot{s}\mathbf{t}(P(s)) + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}(P(s))}{ds} \dot{s} = \\ &= \ddot{s}\mathbf{t}(P(s)) + \frac{\dot{s}^2}{\rho(P(s))} \mathbf{n}(P(s)), \end{aligned}$$

in cui il termine $\ddot{s}\mathbf{t}(P(s))$ è la componente tangenziale dell'accelerazione mentre la quantità $\frac{\dot{s}^2}{\rho(P(s))} \mathbf{n}(P(s))$ è la sua componente normale.

2.2.1 Moto circolare

In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ è assegnata una circonferenza di centro l'origine e raggio R posta sul piano orizzontale $z = 0$. Sulla circonferenza si consideri un punto variabile nel tempo $P(t)$ le cui coordinate sono espresse in forma polare per mezzo di una variabile angolare anch'essa variabile nel tempo $\vartheta(t)$, cioè si ha $P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R \cos \vartheta(t), R \sin \vartheta(t), 0)$ e si ponga inoltre $P_0 = P(0) = (R, 0, 0)$. Il sistema è rappresentato in Figura 2.1. La velocità di $P(t)$ è data da

$$\mathbf{v}(t) = (-\dot{\vartheta}(t)R \sin \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)R \cos \vartheta(t), 0).$$


 FIGURA 2.1: Moto circolare di un punto su una circonferenza posta sul piano $z = 0$.

Si è visto nell'Esempio 1.11.1 che in una circonferenza l'ascissa curvilinea è data da $s(t) = R\vartheta(t)$, il versore tangente da $\mathbf{t} = (-\sin \vartheta(t), \cos \vartheta(t), 0)$ e il versore normale è $\mathbf{n} = (-\cos \vartheta(t), -\sin \vartheta(t), 0)$. Quindi il vettore velocità può essere scritto come

$$\mathbf{v}(t) = R\dot{\vartheta}\mathbf{t} = \dot{s}\mathbf{t}.$$

Inoltre il vettore accelerazione è

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = R\ddot{\vartheta}\mathbf{t} + R\dot{\vartheta}\dot{\mathbf{t}} = R\ddot{\vartheta}\mathbf{t} + R\dot{\vartheta}^2\mathbf{n}.$$

Il termine $R\dot{\vartheta}^2\mathbf{n}$ prende il nome di accelerazione centripeta e la quantità $\omega(t) = \dot{\vartheta}(t)$ è detta velocità angolare. Si ottiene così la relazione

$$\mathbf{a} = R\dot{\omega}\mathbf{t} + R\omega^2\mathbf{n}.$$

Infine se $\omega = \text{cost.}$ si ha solamente $\mathbf{a} = R\omega^2\mathbf{n}$ e il moto si dice circolare uniforme.

2.2.2 Moto armonico

In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ è assegnata una circonferenza di centro l'origine e raggio R posta sul piano orizzontale $z = 0$. Sulla circonferenza si consideri un punto variabile nel tempo $P(t)$ e la sua proiezione $P^*(t)$ sul diametro giacente sull'asse x . Il sistema è rappresentato in Figura 2.2. Se $P(t)$ si muove di moto circolare uniforme allora il punto $P^*(t)$ descrive un moto che viene detto armonico. Esprimendo le coordinate di $P(t)$ in forma polare, cioè $P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R \cos \vartheta(t), R \sin \vartheta(t), 0)$, sia δ la fase iniziale, per cui $\vartheta(0) = \delta$, da cui si ha $P_0 = P(0) = (R \cos \delta, R \sin \delta, 0)$. Di conseguenza il

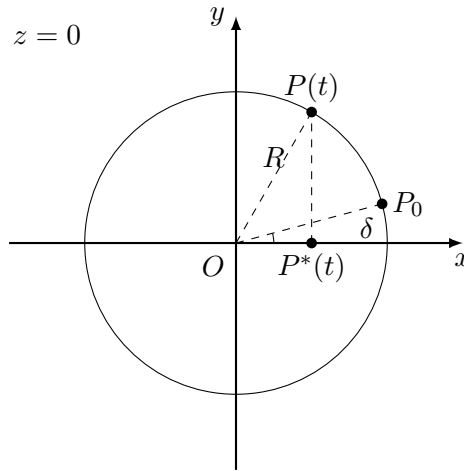


FIGURA 2.2: Rappresentazione di un moto armonico.

moto di $P^*(t)$ è dato da

$$P^*(t) = (x(t), 0, 0) = (R \cos \vartheta(t), 0, 0)$$

con $\vartheta(0) = \delta$. Poiché il moto di $P(t)$ è circolare uniforme si ha $\omega = \text{cost.}$ e pertanto $\dot{\vartheta} = \omega$, da cui

$$\vartheta(t) = \omega t + \vartheta(0) = \omega t + \delta.$$

Si ottiene dunque

$$x(t) = R \cos(\omega t + \delta),$$

da cui derivando rispetto a t si ha

$$\dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t + \delta), \quad \ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

e quindi infine

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

che è detta equazione dei moti armonici.

2.2.3 Moto elicoidale

Consideriamo il moto di un punto materiale $P(t)$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ descrive un moto circolare di raggio R . Indicando con $\vartheta(t)$ la variabile angolare di tale moto, la legge oraria del moto di $P(t)$ è esprimibile come

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(R \cos \vartheta(t), R \sin \vartheta(t), \int_0^t v_z(\tau) \, d\tau \right),$$

dove $v_z(t)$ è per il momento una qualunque funzione del tempo sufficientemente regolare. La velocità di $P(t)$ è data da

$$\mathbf{v}(t) = -R\dot{\vartheta}(t) \sin \vartheta(t) \mathbf{e}_1 + R\dot{\vartheta}(t) \cos \vartheta(t) \mathbf{e}_2 + v_z(t) \mathbf{e}_3.$$

Di conseguenza il moto è elicoidale se e solo se $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 = \text{cost.}$ e ciò accade se e solo se

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3}{|\mathbf{v}|} = \text{cost.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_z(t)}{\sqrt{R^2 \dot{\vartheta}^2 + v_z^2}} = \text{cost.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \frac{\dot{\vartheta}^2}{v_z^2}}} = \text{cost.},$$

cioè se e soltanto se $\frac{\dot{\vartheta}}{v_z} = \text{cost.}$ e in particolare scegliendo $\dot{\vartheta} = \text{cost.}$ e $v_z = \text{cost.}$ si ottiene un moto elicoidale uniforme.

2.3 Cinematica del punto vincolato

Definizione 2.3.1. Dato un punto materiale P in moto, si dice vincolo una qualunque limitazione sulle posizioni o sullo stato cinematico del punto.

Definizione 2.3.2. Un punto materiale soggetto a vincoli si dice vincolato, altrimenti è detto libero.

Definizione 2.3.3. Il numero di funzioni indipendenti necessarie a descrivere la legge oraria rappresenta i gradi di libertà (g.d.l.) di P . Un insieme di g.d.l. funzioni indipendenti atte a descrivere il moto si dicono parametri lagrangiani.

Esempio 2.3.1. 1. Se $P(t)$ è libero allora g.d.l. = 3.

2. Se $P(t)$ è vincolato ad una circonferenza allora g.d.l. = 1, perché il moto resta determinato dalla scelta dell'angolo.

3. Se $P(t)$ è vincolato ad un piano allora g.d.l. = 2.

Osservazione 2.3.1. La scelta dei parametri lagrangiani non è unica e in generale risulta solo locale. Ad esempio nel caso di un punto vincolato ad una circonferenza di raggio R , come parametro lagrangiano si può scegliere l'angolo rappresentante l'anomalia in coordinate polari ma si può anche esplicitare una coordinata. Se $x^2 + y^2 = R$ e $z = 0$ sono le equazioni della circonferenza, supponiamo di ricavare la seconda coordinata

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

A seconda del quadrante occorre scegliere il segno appropriato e quindi ciascuna scelta è locale e non copre tutte le possibili posizioni occupabili dal punto materiale.

Definizione 2.3.4. Un vincolo è detto fisso se non dipende dal tempo, mobile se vi dipende.

Definizione 2.3.5. Un vincolo è detto olònomo se impone una limitazione sulle posizioni, anolònomo se impone una restrizione sullo stato cinematico (cioè su velocità e accelerazione) e non deriva da vincoli olonomi.

Osservazione 2.3.2. Un vincolo di posizione induce automaticamente una restrizione sullo stato cinematico (ad esempio un corpo vincolato ad un piano Oxy ha velocità nulla lungo l'asse z). Nel caso in cui la restrizione sulla velocità non provenga da un vincolo di posizione si ha un vincolo anolonomo.

Definizione 2.3.6. Un vincolo si dice bilatero se è espresso da equazioni, unilatero se è espresso da disequazioni.

Definizione 2.3.7. Un vincolo è detto semplice se toglie un g.d.l., doppio se ne toglie 2, triplo se ne toglie 3.

Esempio 2.3.2. L'equazione $z = 0$ è un vincolo fisso, olonomo, bilatero e semplice.

Osservazione 2.3.3. I vincoli unilateri sono efficaci solo nelle configurazioni di confine.

2.4 Vincoli olonomi semplici

Sia P un punto materiale vincolato ad una superficie S . Si distinguono due casi:

1. S è una superficie mobile di equazione $f(x, y, z, t) = 0$;
2. S è una superficie fissa di equazione $f(x, y, z) = 0$.

Si consideri in primo luogo il caso in cui S sia una superficie fissa e si supponga che S sia una superficie regolare di classe C^1 , cioè che esistano $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ e siano continue e inoltre $\nabla f \neq \mathbf{0}$ per ogni $P \in S$. Per fissare le idee si supponga che localmente si abbia $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ allora, per il Teorema di Dini, localmente si può scrivere $z = g(x, y)$. Quindi si ha la parametrizzazione locale $P(x, y, g(x, y))$ e pertanto g.d.l. = 2. Se si impone localmente che $x = \bar{x} =$ costante allora $(\bar{x}, y, g(\bar{x}, y))$ sono i punti di una curva giacente sulla superficie S e passante per $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, g(\bar{x}, \bar{y}))$. Si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{P=\bar{P}} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{P=\bar{P}}, \quad (2.4.1)$$

che rappresenta esso stesso un vettore tangente ad S in \bar{P} . Analogamente se si impone localmente che $y = \bar{y}$ allora $(x, \bar{y}, g(x, \bar{y}))$ sono i punti di una curva giacente sulla superficie

S è passante per $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, g(\bar{x}, \bar{y}))$. Quindi si ha

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{P=\bar{P}} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{P=\bar{P}}, \quad (2.4.2)$$

che rappresenta pure un vettore tangente ad S in \bar{P} . Poiché i vettori (2.4.1) e (2.4.2) sono linearmente indipendenti, allora essi generano un piano passante per \bar{P} , detto piano tangente alla superficie S in \bar{P} .

Si calcoli adesso

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{P}) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{P=\bar{P}} &= \left(\frac{\partial f(\bar{P})}{\partial x}, \frac{\partial f(\bar{P})}{\partial y}, \frac{\partial f(\bar{P})}{\partial z} \right) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial f(\bar{P})}{\partial x} + \frac{\partial f(\bar{P})}{\partial z} \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}. \end{aligned}$$

Poiché $f(x, y, g(x, y)) = 0$, si ha

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

e pertanto

$$\nabla f(\bar{P}) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{P=\bar{P}} = 0.$$

Analogamente si trova che

$$\nabla f(\bar{P}) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{P=\bar{P}} = 0.$$

Ne segue che $\nabla f(\bar{P})$ è ortogonale al piano tangente alla superficie S in \bar{P} . L'equazione di quest'ultimo è data da

$$(Q - \bar{P}) \cdot \nabla f(\bar{P}) = 0$$

Osservazione 2.4.1. Sia $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ un punto materiale vincolato alla superficie S di equazione $f(x, y, z) = 0$. Allora si ha

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall t,$$

da cui

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f(P(t))}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial f(P(t))}{\partial y} \dot{y}(t) + \frac{\partial f(P(t))}{\partial z} \dot{z}(t).$$

Pertanto

$$\nabla f(P(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$$

è l'equazione delle velocità possibili e rappresenta il vincolo cinematico indotto dal vincolo di posizione S .

Si consideri adesso il caso in cui S sia una superficie mobile di equazione $f(x, y, z, t) = 0$. Allora con un calcolo analogo, l'equazione delle velocità possibili è

$$0 = \frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

e inoltre la quantità

$$\mathbf{v}_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla f}{|\nabla f|^2} \nabla f = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|^2} \nabla f$$

è la componente di trascinamento dovuta al moto del vincolo S .

Osservazione 2.4.2. Sia P un punto vincolato ad una superficie regolare S (in generale mobile) avente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, t) \\ y = y(q_1, q_2, t) \\ z = z(q_1, q_2, t) \end{cases}$$

con q_1 e q_2 parametri locali. Supponiamo che i vettori tangenti

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial q_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_2} \right)$$

siano linearmente indipendenti. Allora

$$P(t) = (x(q_1(t), q_2(t)), y(q_1(t), q_2(t)), z(q_1(t), q_2(t))),$$

si ha

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial P}{\partial t},$$

dove il termine $\frac{\partial P}{\partial t}$ dà l'effetto di trascinamento. Nel caso particolare di vincolo fisso si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \dot{q}_2.$$

Esempio 2.4.1. Punto vincolato ad una superficie sferica. In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, si consideri una superficie sferica S di centro l'origine e raggio r . Sia P un punto vincolato a tale superficie e si indichi con P^* la proiezione di P sul piano equatoriale $z = 0$. Si individuano così due angoli φ e ϑ , come in Figura 2.3, detti rispettivamente longitudine e colatitudine, con $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Le curve del tipo $\vartheta = \text{cost.}$ sono chiamate paralleli, quelle del tipo $\varphi = \text{cost.}$ meridiani. In coordinate

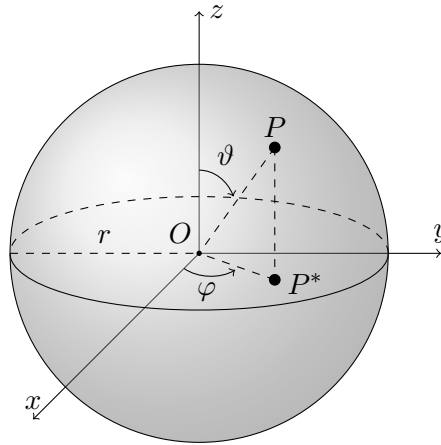


FIGURA 2.3: Superficie sferica in un sistema di riferimento cartesiano.

sferiche, le equazioni parametriche della superficie S sono date da

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

con $r > 0$ costante. In questo caso i vettori tangenti ad S in P sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} &= (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta) \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

e, poiché il vincolo è fisso si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

Se invece di avere il raggio costante si considera $r(t) = r_0 + at$ con $a > 0$, le equazioni parametriche diventano

$$\begin{cases} x = r(t) \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r(t) \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r(t) \cos \vartheta \end{cases}$$

e $\frac{\partial P}{\partial t}$ non è più nullo ma dato da

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{dr}{dt} \sin \vartheta \cos \varphi, \frac{dr}{dt} \sin \vartheta \sin \varphi, \frac{dr}{dt} \cos \vartheta \right) = (a \sin \vartheta \cos \varphi, a \sin \vartheta \sin \varphi, a \cos \vartheta).$$

Pertanto, in questo caso si ha

$$\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

2.5 Vincoli olonomi doppi

Un vincolo olonomo doppio si ottiene imponendo che durante il moto un punto materiale appartenga contemporaneamente a due superfici distinte. In un sistema di riferimento

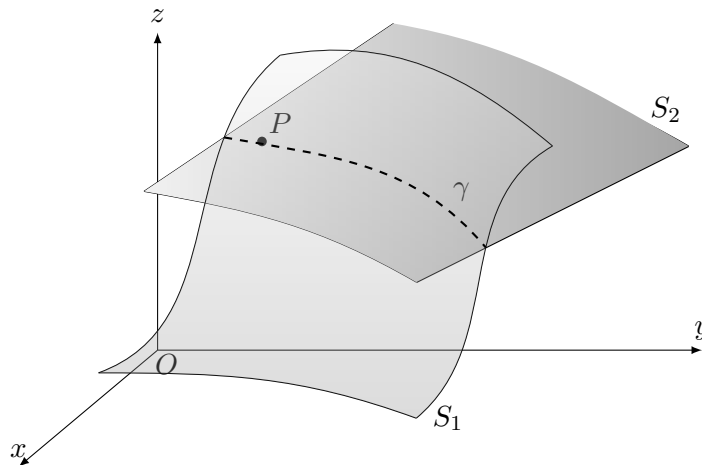


FIGURA 2.4: Intersezione di due superfici in un sistema di riferimento cartesiano.

cartesiano $Oxyz$, si considerino due superfici regolari mobili S_1 ed S_2 di equazioni rispettivamente $f_1(x, y, z, t) = 0$ ed $f_2(x, y, z, t) = 0$. Sia P un generico punto vincolato ad appartenere ad entrambe le superfici e quindi deve giacere sulla curva di intersezione γ . Si supponga inoltre che $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ per ogni $t \geq 0$. Potrebbe accadere che f_1 ed f_2 rappresentino la stessa superficie. Per evitarlo imponiamo che i vettori tangenti siano linearmente indipendenti, ovvero che lo siano ∇f_1 e ∇f_2 . Ciò accade se e solo se la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y, z)} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right\|$$

ha rango 2. In questo caso vi è un solo parametro libero q e la curva di intersezione γ può essere descritta da $P(q(t))$. Si osservi che se il rango fosse stato 1 allora si sarebbe potuto rimuovere un vincolo e si sarebbero avuti due g.d.l.

Definizione 2.5.1. Dato un sistema che presenta più vincoli, se uno di essi può essere rimosso senza alterare i g.d.l. allora tale vincolo si dice *inefficace*.

Osservazione 2.5.1. Tre vincoli semplici, indipendenti e con intersezione non vuota rimuovono 3 g.d.l. e pertanto il punto rimane bloccato.

2.6 Vincoli anolonomi

Illustriamo come si studiano i vincoli anolonomi direttamente con un esempio.

Esempio 2.6.1. Il moto dello sciatore. Si consideri un punto materiale che per semplicità si assume muoversi sul piano $z = 0$. Se O è un polo di tale piano richiediamo che sia soddisfatta la condizione $P - O \parallel \mathbf{v}$ per ogni istante temporale $t \geq 0$, ovvero

$$P - O \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6.1)$$

Essendo $P - O = (x, y, 0)$ e $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, ha

$$(P - O) \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathbf{e}_3.$$

Pertanto la (2.6.1) è valida se e solo se

$$x\dot{y} - \dot{x}y = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.6.2)$$

Si supponga per assurdo che esista un vincolo olonomo, espresso da un'equazione del tipo $f(x, y, z, t) = 0$, da cui è possibile dedurre la (2.6.2) derivando totalmente rispetto al tempo. Deve aversi

$$\frac{df}{dt} = g,$$

ove $g(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = x\dot{y} - \dot{x}y$, e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = g.$$

Confrontando i due membri, l'equazione precedente, data l'arbitrarietà di \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

da cui integrando le ultime due equazioni si deduce che $f = f(x, y)$. Inoltre integrando la prima equazione rispetto a x si ottiene $f(x, y) = xy + \varphi(y)$, dove $\varphi(y)$ è una generica

funzione di y . Derivando rispetto a y l'espressione così trovata si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + \varphi(y)) = x + \varphi'(y)$$

e sfruttando la seconda equazione del sistema si ottiene infine $x + \varphi'(y) = -x$, ovvero $\varphi'(y) = -2x$, che è assurdo in quanto funzioni che dipendono da variabili diverse non possono coincidere per ogni coppia (x, y) . Pertanto il vincolo imposto è anolonomo.

Un altro modo per ottenere l'assurdo è quello di osservare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

ma la funzione f ammette derivate parziali seconde miste continue e quindi uguali per il Teorema di Schwartz, ottenendo così una contraddizione.

2.7 Cinematica di un sistema di punti materiali

Sia dato un sistema Σ di N punti materiali $P_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, con $i = 1, \dots, N$ e aventi velocità e accelerazione rispettivamente

$$\mathbf{v}_i = \frac{dP_i}{dt}, \quad \mathbf{a}_i = \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt},$$

per ogni $i = 1, \dots, N$. In assenza di vincoli il sistema è libero e presenta $3N$ g.d.l.. Supponiamo che siano assegnati m vincoli olonomi bilateri di equazioni

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m$$

e si introduca la matrice jacobiana

$$J = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, z_N)}. \quad (2.7.1)$$

indichiamo con ρ il rango di J . Se l'intersezione dei vincoli risulta non vuota allora si distinguono i diversi casi di seguito schematizzati.

1. $0 < m < 3N$

(a) $\rho = m$

Non vi sono vincoli inefficaci e pertanto g.d.l. = $3N - m$. Il sistema si dice *labile*.

(b) $\rho < m$

Si hanno $m - \rho$ vincoli inefficaci e quindi g.d.l. = $3N - \rho$. Il sistema si dice *labile a vincoli inefficaci*.

2. $m = 3N$

(a) $\rho = m$

Non vi sono vincoli inefficaci (caso isostatico) e si ha g.d.l. = 0. Il sistema si dice *isostatico*.

(b) $\rho < m$

Si hanno $m - \rho$ vincoli inefficaci (sistema labile) e inoltre g.d.l. = $3N - \rho$.

3. $m > 3N$

(a) $\rho = 3N$

Vi sono $m - \rho$ vincoli inefficaci e g.d.l. = 0. Il sistema si dice *iperstatico*.

(b) $\rho < 3N$

Il sistema è labile, con vincoli inefficaci e g.d.l. = $3N - \rho$.

Esempio 2.7.1. Si consideri il sistema di punti materiali $\Sigma = \{P_1, P_2\}$, sottoposto al vincolo di rigidità

$$d(P_1(t), P_2(t)) = a, \quad \forall t \geq 0,$$

con a costante positiva. In particolare tale costante vale $d(P_1(0), P_2(0))$. Equivalentemente, se

$$P_1(t) = P_1(x_1(t), y_1(t), z_1(t)), \quad P_2(t) = P_2(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) \quad (2.7.2)$$

allora il vincolo di rigidità può essere espresso da

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - a^2 = 0.$$

La matrice jacobiana in questo caso è data da

$$\begin{aligned} J &= \left\| \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \right] \right\| = \\ &= \left\| [2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), 2(z_1 - z_2), -2(x_1 - x_2), -2(y_1 - y_2), -2(z_1 - z_2)] \right\|, \end{aligned}$$

il cui rango è 1 se e solo se $a > 0$. Allora si ha g.d.l. = $6 - 1 = 5$. A questo punto si consideri un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$. Se si fissa il punto P_1 , il punto P_2 deve appartenere alla superficie sferica di centro P_1 e raggio a . Come visto nell'Esempio 2.4.1,

scelti come parametri liberi la longitudine φ e la colatitudine ϑ , le relazioni

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + a \sin \vartheta \cos \varphi \\ y_2 = y_1 + a \sin \vartheta \sin \varphi \\ z_2 = z_1 + a \cos \vartheta \end{cases}$$

esprimono le coordinate del punto P_2 . $(x_1, y_1, z_1, \vartheta, \varphi)$ rappresentano una scelta (locale) di parametri lagrangiani.

2.8 Cinematica dei continui

Si consideri un corpo che ad ogni istante di tempo occupa in maniera continua (euristicamente senza vuoti) una certa porzione dello spazio fisico. Indicando con \mathcal{B} l'insieme dei punti del corpo, \mathcal{B} risulta identificabile con un dominio di \mathbb{R}^3 , ovvero la chiusura di un aperto connesso¹. Si indichi con \mathcal{B}_0 l'insieme delle posizioni occupate all'istante iniziale, detta configurazione di riferimento, e con \mathcal{B}_t la configurazione al tempo $t > 0$. Spesso nella pratica si identifica \mathcal{B} con \mathcal{B}_0 .

Rispetto un sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ la situazione appena descritta è rappresentata in Figura 2.5. In generale ogni punto di \mathcal{B} è libero di muoversi indipendentemente dagli

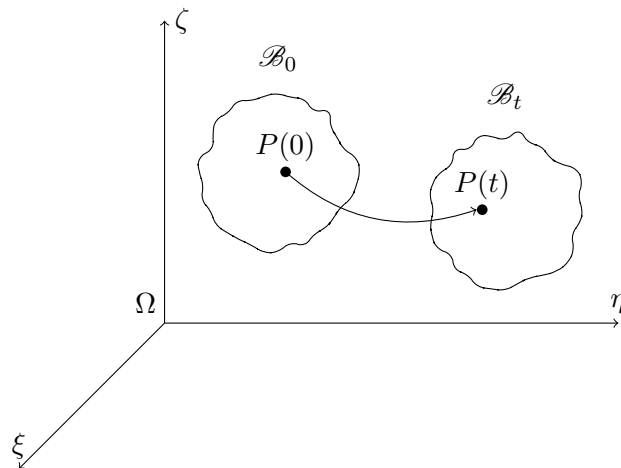


FIGURA 2.5: Rappresentazione di un corpo continuo.

altri, quindi si hanno ∞^3 g.d.l.; nel caso particolare di una lamina, vi sono ∞^2 g.d.l. e se si tratta di fili o verghe si hanno ∞^1 g.d.l..

La trattazione dei continui nella loro generalità esula dagli scopi del corso. Nel seguito si prenderà in esame una classe particolare di sistemi continui, quelli rigidi.

¹Nel caso il corpo sia costituito da più parti tra di loro disconnesse si effettua la trattazione per ogni componente connessa

2.9 Cinematica dei rigidi

Definizione 2.9.1. Il moto di un corpo continuo o discreto \mathcal{B} si dice rigido se risulta

$$d(P(t), Q(t)) = d(P(0), Q(0)) = \text{cost.}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{B}, \quad \forall t > 0.$$

Definizione 2.9.2. Si dice che un corpo, continuo o discreto, \mathcal{B} è rigido se tutti i suoi moti possibili sono rigidi.

Esempio 2.9.1. Asta rigida. In un sistema di riferimento cartesiano $\Omega\xi\eta\zeta$ si consideri un'asta rigida AB di lunghezza L con il punto B coincidente con Ω e il punto A giacente sull'asse ξ . Sia quest'ultima la configurazione \mathcal{B}_0 del sistema all'istante iniziale. In questo caso un punto P dell'asta ha coordinate $P = (s, 0, 0)$ con $s \in [0, L]$. Supponendo che l'asta sia in moto, si consideri la sua configurazione \mathcal{B}_t all'istante t . Introduciamo un nuovo sistema di riferimento $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ con Ω' coincidente con la nuova posizione del punto $B = (\xi_B, \eta_B, \zeta_B)$ dell'asta e gli assi ξ' , η' e ζ' paralleli e concordi rispettivamente agli assi ξ , η e ζ . Il sistema è rappresentato in Figura 2.6. Indicando con $P(t)$ il generico punto dell'asta al tempo t , se esso si trova a distanza s dal punto Ω' allora $P(t)$ si trova sulla superficie della sfera di centro Ω' e raggio s . Pertanto è possibile utilizzare le coordinate sferiche, ottenendo

$$P(t) = (\xi_B + s \sin \vartheta \cos \varphi, \eta_B + s \sin \vartheta \sin \varphi, \zeta_B + s \cos \vartheta) \quad s \in [0, L],$$

da cui si deduce che il sistema ha 5 g.d.l..

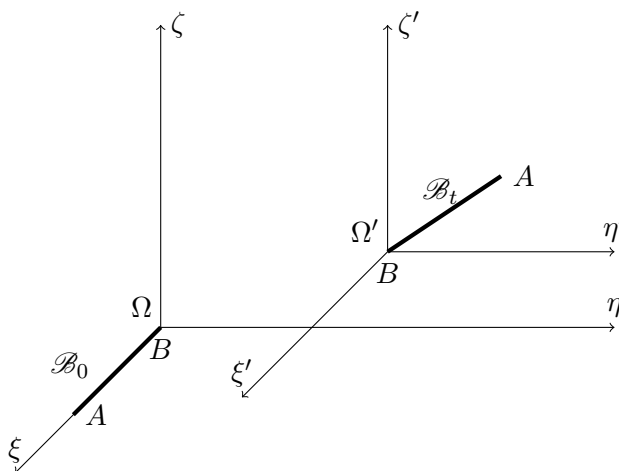


FIGURA 2.6: Rappresentazione di un'asta rigida.

Proposizione 2.9.1. Siano dati una matrice $R \in \mathbb{R}^3$ e una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di \mathbb{R}^3 e sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che

$$[f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = R [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

f conserva i prodotti scalari se e solo se $R \in SO(3)^2$.

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti, se f conserva i prodotti scalari si ha

$$f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Siano

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \mathbf{e}_j,$$

ne segue che

$$\begin{aligned} [f(\mathbf{u})]_{\mathcal{B}} &= R[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = R \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^3 R_{1h}u_h \\ \sum_{h=1}^3 R_{2h}u_h \\ \sum_{h=1}^3 R_{3h}u_h \end{pmatrix}, \\ [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} &= R[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = R \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 R_{1k}v_k \\ \sum_{k=1}^3 R_{2k}v_k \\ \sum_{k=1}^3 R_{3k}v_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si osservi che per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ si ottiene

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^3 [f(\mathbf{u})]_i [f(\mathbf{v})]_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{h=1}^3 R_{ih}u_h \sum_{k=1}^3 R_{ik}v_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 R_{ih}R_{ik}u_hv_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 R_{hi}^T R_{ik}u_hv_k, \end{aligned}$$

dove l'ultimo si ha per la simmetria di R e da cui, poiché f conserva i prodotti scalari, si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 R_{hi}^T R_{ik}u_hv_k.$$

Inoltre tale relazione deve valere per i vettori di base, cioè

$$\delta_{pq} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = \sum_{i=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 R_{hi}^T R_{ik} \delta_{hp} \delta_{kq} = \sum_{i=1}^3 R_{pi}^T R_{iq} = (R^T R)_{pq}.$$

Pertanto ne segue che $R^T R = I$. In modo del tutto analogo si può dimostrare che $RR^T = I$ e quindi in definitiva si ha che $R \in SO(3)$.

La condizione è sufficiente. Infatti, se $R \in SO(3)$ ne segue che $R^T R = RR^T = I$ e di

²Con il simbolo $[\mathbf{a}]_{\mathcal{B}}$ sono state indicate le coordinate di \mathbf{a} rispetto alla base \mathcal{B}

conseguenza

$$f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{h,k=1}^3 R_{hi}^T R_{ik} u_h v_k = \sum_{h,k=1}^3 \delta_{hk} u_h v_k = \sum_{h=1}^3 u_h v_h = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

cioè f conserva i prodotti scalari. \square

Proposizione 2.9.2. *Se \mathcal{B} è un corpo continuo in moto rigido allora durante il moto si conservano i prodotti scalari, cioè*

$$(P(t) - O(t)) \cdot (Q(t) - O(t)) = (P(0) - O(0)) \cdot (Q(0) - O(0)) \quad \forall P, Q, O \in \mathcal{B}.$$

Dimostrazione. Poiché \mathcal{B} è in moto rigido si ha che

$$|P(t) - Q(t)|^2 = |P(0) - Q(0)|^2 = \text{cost.} \quad \forall P, Q \in \mathcal{B},$$

da cui, equivalentemente, si ottiene

$$|(P(t) - O(t)) + (O(t) - Q(t))|^2 = |(P(0) - O(0)) + (O(0) - Q(0))|^2 \quad \forall P, Q, O \in \mathcal{B}$$

e inoltre, sviluppando i quadrati, si ha

$$\begin{aligned} & |(P(t) - O(t))|^2 + 2(P(t) - O(t)) \cdot (O(t) - Q(t)) + |(P(t) - O(t))|^2 = \\ & |(P(0) - O(0))|^2 + 2(P(0) - O(0)) \cdot (O(0) - Q(0)) + |(P(0) - O(0))|^2 \quad \forall P, Q, O \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Poiché il moto è rigido si hanno

$$|(P(t) - O(t))|^2 = |(P(0) - O(0))|^2, \quad |(O(t) - Q(t))|^2 = |(O(0) - Q(0))|^2$$

da cui, semplificando ambo i membri della precedente relazione, si ottiene la tesi. \square

Per quanto sopra in un moto rigido resta individuata una trasformazione lineare di tipo ortogonale $R(t) \in SO(3)$ tale che

$$P(t) - O(t) = R(t)(P(0) - O(0)) \quad \forall P, O \in \mathcal{B}, \forall t > 0,$$

che viene chiamata *equazione finita dei moti rigidi*. Da quest'ultima relazione, fissato un polo di riferimento Ω , fisso nel tempo si ha che

$$P(t) - \Omega + \Omega - O(t) = R(t)(P(0) - O(0)),$$

da cui

$$P(t) - \Omega = O(t) - \Omega + R(t)(P(0) - O(0)). \quad (2.9.1)$$

Pertanto, assegnati $P(0)$, $O(0)$, se sono noti $O(t)$ e $R(t)$ per ogni $t > 0$ allora è possibile determinare $P(t)$ per ogni $P \in \mathcal{B}$. A tale scopo sono necessari 3 parametri per determinare $O(t)$ e altri 3 per determinare $R(t)$. Quindi, in definitiva, un corpo continuo in moto rigido che possiede almeno tre punti non allineati ha 6 g.d.l.. Nel caso di punti allineati, come visto nell'esempio 2.9.1 si hanno 5 g.d.l..

Proposizione 2.9.3. *Un corpo discreto o continuo \mathcal{B} è rigido se e solo se per ogni moto esiste un sistema di riferimento ortonormale levogiro solidale a \mathcal{B} , cioè tale che le coordinate dei punti di \mathcal{B} rimangono costanti durante il moto e per ogni moto possibile.*

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione solo nel caso continuo.

La condizione è necessaria. Si consideri la configurazione iniziale \mathcal{B}_0 del corpo \mathcal{B} . Poiché \mathcal{B}_0 è un corpo continuo si ha che $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_0 \neq \emptyset$ e quindi se $O \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_0$ allora esiste $\mathcal{I}_\delta(O) \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{B}}_0$ (ovvero la sfera aperta di centro O e raggio δ). Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{I}_\delta(O)$ e tali che, riscalandolo eventualmente le unità di misura,

$$|P_i(0) - O(0)| = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$(P_1(0) - O(0)) \wedge (P_2(0) - O(0)) = P_3(0) - O(0),$$

cioè i vettori $P_1(0) - O(0)$, $P_2(0) - O(0)$ e $P_3(0) - O(0)$ costituiscono una terna ortonormale levogira. Per ogni istante $t > 0$ si consideri la configurazione \mathcal{B}_t del sistema al tempo t e in essa si considerino ancora i punti O , P_1 , P_2 e P_3 che continuano a formare una terna ortonormale levogira. Poiché \mathcal{B} è un corpo rigido allora ogni moto possibile è rigido e quindi per la Proposizione 2.9.2 durante il moto si conservano i prodotti scalari, cioè

$$(P(t) - O(t)) \cdot (P_i(t) - O(t)) = (P(0) - O(0)) \cdot (P_i(0) - O(0)), \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall P \in \mathcal{B}.$$

In definitiva, durante il moto si conservano le coordinate dei punti di \mathcal{B} .

La condizione sufficiente si ottiene banalmente dal fatto che se le coordinate dei punti di \mathcal{B} sono costanti durante il moto e per ogni moto possibile allora lo sono anche le distanze tra i punti di \mathcal{B} . \square

2.9.1 Il campo di velocità in un moto rigido

Considerato un corpo continuo \mathcal{B} in moto rigido si vuole determinare come varia la velocità di un generico punto $P \in \mathcal{B}$ durante il moto. Fissato $\Omega \in \mathcal{B}$, dalla legge oraria

dei moti rigidi,

$$P(t) - \Omega = O(t) - \Omega + R(t)(P(0) - O(0)), \quad \forall P, O \in \mathcal{B}, \forall t > 0,$$

con $R(t) \in SO(3)$, derivando ambo i membri si ha

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \dot{R}(t)(P(0) - O(0)), \quad \forall P, O \in \mathcal{B}, \forall t > 0. \quad (2.9.2)$$

Considerando ancora la legge oraria dei moti rigidi, scritta questa volta nella forma

$$P(t) - O(t) = R(t)(P(0) - O(0)),$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri per $R^T(t)$, si ha

$$R^T(t)(P(t) - O(t)) = R^T(t)R(t)(P(0) - O(0)) = I(P(0) - O(0)) = (P(0) - O(0)).$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella (2.9.2) si ottiene infine

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + W(t)(P(t) - O(t)), \quad \forall P, O \in \mathcal{B}, \forall t > 0,$$

avendo posto $W(t) := \dot{R}(t)R^T(t)$, che è detta *matrice di spin*.

Proposizione 2.9.4. *La matrice W è antisimmetrica, ovvero $W + W^T = 0_{3 \times 3}$ essendo $0_{3 \times 3}$ la matrice nulla di ordine 3.*

Dimostrazione. Dalla relazione $W(t) := \dot{R}(t)R^T(t)$, si ha che

$$W + W^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \frac{d}{dt}(RR^T) = \frac{d}{dt}(I) = 0_{3 \times 3}.$$

□

Osservazione 2.9.1. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice antisimmetrica di ordine 3 si ha che $A + A^T = 0_{3 \times 3}$ e quindi

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Di conseguenza, se $j = i$ allora deve essere $a_{ii} = 0$; invece se $j \neq i$ $a_{ij} = -a_{ji}$. Pertanto è sufficiente assegnare i tre elementi triangolari superiori (o i tre triangolari inferiori). Ciò suggerisce che la matrice A sia associabile ad un vettore e viceversa. Tale osservazione viene chiarita da quanto segue.

Proposizione 2.9.5. *Sia $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matrice antisimmetrica. Allora esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ tale che $W\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Inoltre $\boldsymbol{\omega}$ prende il nome di vettore assiale associato all'operatore W .*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un generico vettore di \mathbb{R}^3 . Poiché W è una matrice antisimmetrica di ordine 3 si ha

$$W\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{12}u_2 + W_{13}u_3 \\ -W_{12}u_1 + W_{23}u_3 \\ -W_{13}u_1 - W_{23}u_2 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte se $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ si ha

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (\omega_2u_3 - \omega_3u_2)\mathbf{e}_1 + (\omega_3u_1 - \omega_1u_3)\mathbf{e}_2 + (\omega_1u_2 - \omega_2u_1)\mathbf{e}_3.$$

Allora uguagliando le relazioni prima ottenute si ottengono

$$\begin{cases} W_{12}u_2 + W_{13}u_3 = \omega_2u_3 - \omega_3u_2 \\ -W_{12}u_1 + W_{23}u_3 = \omega_3u_1 - \omega_1u_3 \\ -W_{13}u_1 - W_{23}u_2 = \omega_1u_2 - \omega_2u_1 \end{cases}$$

che devono essere valide per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, conducendo infine alle relazioni

$$\omega_1 = -W_{23}, \quad \omega_2 = W_{13}, \quad \omega_3 = -W_{12}.$$

□

Osservazione 2.9.2. Se W è la matrice di spin allora $\boldsymbol{\omega}$ si dice vettore velocità angolare e vale la relazione

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P(t) - O(t)), \quad (2.9.3)$$

detta *formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi*. I vettori $\mathbf{v}_O(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ vengono detti vettori caratteristici del moto.

Osservazione 2.9.3. Se vale la (2.9.3) allora il moto è rigido. Infatti, si consideri un generico moto per cui valga la (2.9.3) e si moltiplichino scalarmente ambo i membri per il vettore $P(t) - O(t)$ ottenendo

$$(\mathbf{v}_P(t) - \mathbf{v}_O(t)) \cdot (P(t) - O(t)) = (\boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P(t) - O(t))) \cdot (P(t) - O(t)) = 0.$$

Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{v}_P(t) - \mathbf{v}_O(t)) \cdot (P(t) - O(t)) = (P(t) - O(t)) \cdot \frac{d}{dt}(P(t) - O(t)) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |P(t) - O(t)|^2 \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$|P(t) - O(t)| = \text{cost.}$$

e dunque il moto è rigido.

Proposizione 2.9.6. *Un corpo continuo \mathcal{B} si muove di moto rigido se e solo se vale*

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P(t) - O(t))$$

per ogni coppia di punti materiali P e $O \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalle Osservazioni 2.9.2 e 2.9.3. □

Teorema 2.9.7 (di Poisson). *Sia \mathcal{B} un corpo che si muove di moto rigido; allora se \mathbf{u} è un vettore solidale durante il moto si ha*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u},$$

che è detta formula di Poisson.

Dimostrazione. Siano $P_1(t), P_2(t) \in \mathcal{B}$ tali che $\mathbf{u}(t) = P_2(t) - P_1(t)$. Per la (2.9.3) si ha

$$\mathbf{v}_{P_1}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - O(t))$$

$$\mathbf{v}_{P_2}(t) = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P_2(t) - O(t))$$

e di conseguenza, sottraendo membro a membro,

$$\mathbf{v}_{P_2}(t) - \mathbf{v}_{P_1}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P_2(t) - P_1(t)) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{u}(t).$$

D'altra parte, poiché

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(P_2(t) - P_1(t)) = \mathbf{v}_{P_2}(t) - \mathbf{v}_{P_1}(t)$$

si ha la tesi. □

Osservazione 2.9.4. Si osservi che non vi è variazione nel tempo di \mathbf{u} , cioè

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{0},$$

per ogni vettore \mathbf{u} solidale a \mathcal{B} e per ogni $t \geq 0$ se e solo se $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \geq 0$.

Osservazione 2.9.5. Siano \mathcal{B} un corpo continuo in moto, $\Omega\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento fisso di versori di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $Oxyz$ un sistema di riferimento solidale a \mathcal{B} di versori base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Grazie al Teorema di Poisson si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}\end{aligned}$$

dette anch'esse formule di Poisson. Dalla conoscenza di $\boldsymbol{\omega}$ si ottiene come variano le direzioni dei versori del sistema solidale. Vale anche una sorta di formula inversa, cioè, note le derivate dei versori solidali, è possibile ricavare la velocità angolare.

Proposizione 2.9.8. *Sia \mathcal{B} un corpo in moto rigido. Allora vale la relazione seguente,*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{j} \wedge \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right], \quad (2.9.4)$$

ove $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sono i versori di una base solidale.

Dimostrazione. Dalle formule di Poisson si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \mathbf{i} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{i} \\ \mathbf{j} \wedge \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{j} \\ \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{k}\end{aligned}$$

e sommando membro a membro si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \mathbf{j} \wedge \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= 3\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{i} - (\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{j} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{k} = \\ &= 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.9.6. Se $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \geq 0$ allora il moto è puramente traslatorio, ovvero tutti i punti hanno la medesima velocità, $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_O(t)$ per ogni $t \geq 0$. Pertanto si ha che

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{0}$$

e quindi la terna solidale ha direzione invariante rispetto all'osservatore.

Esempio 2.9.2. Moto traslatorio circolare. Si consideri un sedile che si muove lungo una guida circolare (es. ruota panoramica). In questo caso l'orientazione della terna solidale al sedile rimane invariante mentre il punto O si muove con traiettoria circolare. (AGGIUNGERE FIGURA)

Osservazione 2.9.7. Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ allora, moltiplicando scalarmente ambo i membri della (2.9.3) per $\boldsymbol{\omega}(t)$, si ha

$$(\mathbf{v}_P(t) - \mathbf{v}_O(t)) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P(t) - O(t)) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0.$$

Pertanto segue che

$$\mathbf{v}_P(t) \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = \mathbf{v}_O(t) \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = \text{cost.} =: \mathcal{I}_c,$$

detto invariante cinematico scalare. Allora la componente della velocità di P lungo il vettore velocità angolare rimane costante durante il moto e dunque è possibile definire il vettore

$$\boldsymbol{\tau} := \mathcal{I}_c \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = \mathbf{v}_{//},$$

detto invariante cinematico vettoriale.

Proposizione 2.9.9. *Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ allora esiste una retta, detta asse di Mozzi, tale che $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{//}$ per ogni P che appartiene all'asse. Inoltre la sua equazione (che varia nel tempo) all'istante t vale*

$$P - O = \frac{\mathbf{v}_O \wedge \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.9.2 Esempi di moti rigidi particolari

1. Moto rototraslatorio.

È un moto durante il quale esiste una retta solidale che rimane di direzione invariante rispetto alla terna fissa. Ad esempio, se durante il moto si mantiene $\mathbf{k} // \mathbf{e}_3$ allora le direzioni \mathbf{i} e \mathbf{j} varieranno solamente sul piano Oxy . Inoltre se $\vartheta(t)$ è l'angolo che la direzione \mathbf{i} della terna solidale forma con la direzione \mathbf{e}_1 della terna fissa, si ha

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos \vartheta(t) \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta(t) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{j} = -\sin \vartheta(t) \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta(t) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{k} = \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\sin\vartheta\dot{\vartheta}\mathbf{e}_1 + \cos\vartheta\dot{\vartheta}\mathbf{e}_2 \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\cos\vartheta\dot{\vartheta}\mathbf{e}_1 - \sin\vartheta\dot{\vartheta}\mathbf{e}_2 \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{0} \end{cases}$$

da cui inoltre

$$\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{j} \wedge \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_3$$

e infine dalla (2.9.4) si ha che $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_3$.

2. *Moto rotatorio.*

È un moto durante il quale esiste una retta solidale che rimane fissa durante il moto rispetto alla terna fissa. Si osservi che il moto rotatorio è un caso particolare di moto rototraslatorio.

3. *Moto elicoidale.*

È un moto durante il quale esiste una retta solidale di direzione invariante i cui punti hanno velocità parallela alla retta stessa, ad esempio il moto della vite. Si osservi che il moto rotatorio è un caso particolare di moto rototraslatorio. Inoltre se i punti della retta solidale hanno velocità nulla ci si riconduce al moto puramente rotatorio.

4. *Moto di precessione.*

È un tipo di moto per cui esiste una retta solidale f , detta asse di figura, che durante il moto forma un angolo costante con una retta fissa p , detta asse di precessione.

2.9.3 Gli angoli di Eulero

Dato un sistema di riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$, di vettori di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, gli angoli di Eulero rappresentano una utile scelta per determinare la orientazione di un sistema di riferimento $Oxyz$, di vettori di base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, solidale con un corpo rigido \mathcal{B} attraverso una serie di rotazioni elementari. A meno di una traslazione, possiamo supporre che i due sistemi di riferimento abbiano la medesima origine, $\Omega \equiv O$. Se i piani $\xi\eta$ e xy sono distinti, si intersecano in una retta detta *linea dei nodi*. Se i piani coincidono, la linea dei nodi non risulta definita.

Mettiamoci nel caso in cui l'asse ζ e quello z siano distinti in modo da poter individuare la linea dei nodi. Sia \mathbf{n} il versore della linea dei nodi orientato in modo che $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{n}$ sia equiverso con \mathbf{e}_3 . Restano individuati i seguenti tre angoli orientati come da figura 2.7:

- φ , detto *angolo di precessione*, tra l'asse ξ e la linea dei nodi con $0 < \varphi < 2\pi$;
- ϑ , detto *angolo di nutazione*, tra gli assi ζ e z con $0 < \vartheta < \pi$;
- ψ , detto *angolo di rotazione propria*, tra la linea dei nodi e l'asse x con $0 < \psi < 2\pi$.

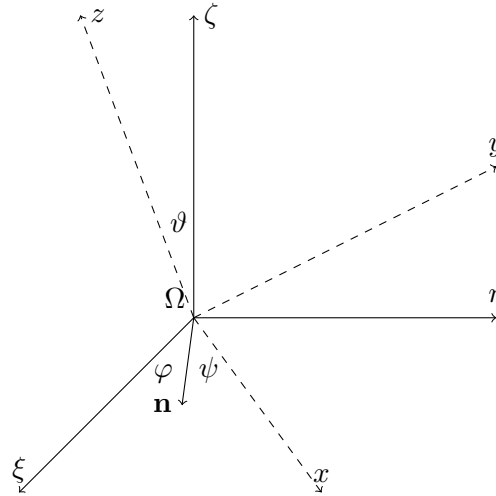


FIGURA 2.7: Rappresentazione degli angoli di Eulero. AGGIUNGERE L'ORIENTAZIONE DEGLI ANGOLI

A stretto rigore gli intervalli di variabilità degli Angoli di Eulero sono aperti (agli estremi si ha una perdita di invertibilità) ma spesso nelle applicazioni concrete è possibile includere anche gli estremi senza ambiguità.

Il sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ può essere portato a coincidere con il sistema di riferimenti Ωxyz per mezzo di tre rotazioni:

1. una rotazione attorno alla direzione \mathbf{e}_3 di un angolo φ , tramite la matrice di rotazione

$$R_{\mathbf{e}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

passando dalla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a quella $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3\}$, con \mathbf{e}'_2 , definito dalle condizioni di ortonormalità;

2. una rotazione attorno alla direzione \mathbf{n} di un angolo ϑ , tramite la matrice di rotazione

$$R_{\mathbf{n}}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

passando dalla base $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3\}$ alla base $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}''_2, \mathbf{k}\}$, con \mathbf{e}''_2 , definito dalle condizioni di ortonormalità;

3. infine una rotazione attorno alla direzione \mathbf{k} di un angolo ψ , tramite la matrice di rotazione

$$R_{\mathbf{k}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

passando dalla base $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}_2'', \mathbf{k}\}$ alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Combinando le tre rotazioni si ottiene

$$M_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}^{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})} = R_{\mathbf{k}}(\psi) R_{\mathbf{n}}(\vartheta) R_{\mathbf{e}_3}(\varphi),$$

la cui la rotazione inversa, dall'ortogonalità delle matrici di rotazione, è

$$M_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}^{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = R_{\mathbf{e}_3}(\varphi)^T R_{\mathbf{n}}(\vartheta)^T R_{\mathbf{k}}(\psi)^T.$$

Osservazione 2.9.8. Dato un moto rigido e i suoi vettori caratteristici $\mathbf{v}_O(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ all'istante t , resta definito un campo vettoriale $\forall P \in \mathcal{E}$

$$P \mapsto \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P - O(t)).$$

detto *atto di moto all'istante t*. Si osservi che tale campo risulta definito anche per punti che non sono materiali.

2.9.4 Il campo di accelerazione in un moto rigido

Considerato un corpo continuo \mathcal{B} in moto rigido si vuole determinare come varia l'accelerazione di un generico punto $P \in \mathcal{B}$ durante il moto. Partendo dalla (2.9.3) e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P(t) &= \mathbf{a}_O(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge (P(t) - O(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge (\mathbf{v}_P(t) - \mathbf{v}_O(t)) = \\ &= \mathbf{a}_O(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge (P(t) - O(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge [\boldsymbol{\omega}(t) \wedge (P(t) - O(t))] \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

Esempio 2.9.3. Moto rotatorio uniforme. Nel sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ si consideri un punto P che ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse ζ . Sia \bar{P} la proiezione del punto P sull'asse ζ . La situazione è rappresentata in Figura 2.8. Sapendo che $\mathbf{a}_\Omega(t) = \mathbf{0}$ e che $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, dalla (2.9.5) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P(t) &= \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - \Omega)] = \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - \bar{P}(t)) + \boldsymbol{\omega}(\bar{P} - \Omega)] = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - \bar{P}(t))], \end{aligned}$$

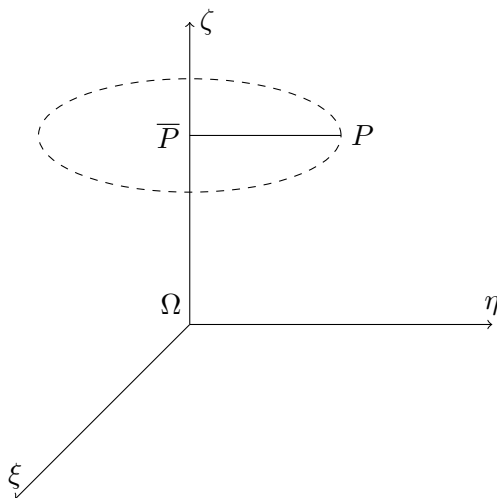


FIGURA 2.8: Rappresentazione degli angoli di Eulero.

in cui l'ultimo passaggio si ottiene in quanto $\boldsymbol{\omega} \parallel (\bar{P} - \Omega)$. Infine, scrivendo esplicitamente il doppio prodotto vettoriale, segue

$$\mathbf{a}_P(t) = [\boldsymbol{\omega} \cdot (P(t) - \bar{P})]\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}](P(t) - \bar{P}) = -\omega^2(P(t) - \bar{P}),$$

in quanto $\boldsymbol{\omega} \perp (P(t) - \bar{P})$. Il vettore $-\omega^2(P(t) - \bar{P})$ è detto accelerazione centripeta ed ha direzione radiale.

2.9.5 Cinematica relativa

L'obiettivo è quello di individuare il legame tra le quantità cinematiche rilevate da osservatori diversi. È chiaro che il moto di un punto materiale viene visto in maniera differente da osservatori distinti. Tuttavia se la realtà ha una sua esistenza oggettiva³ allora devono esistere delle precise relazioni tra le quantità cinematiche determinate dai vari osservatori.

Si consideri un osservatore S , che per convenzione indicheremo come assoluto, posto in un punto Ω dello spazio con associato un sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$. Si consideri inoltre al un secondo osservatore S' , che convenzionalmente diremo relativo, posto in $O(t)$ con associato un sistema di riferimento $Oxyz$. In generale S' è in moto rigido rispetto ad S e sia $\boldsymbol{\omega}(t)$ il vettore velocità angolare di tale moto.

Si consideri adesso il moto di un punto materiale P . La velocità e l'accelerazione di P viste da S sono dette assolute e indicate rispettivamente con \mathbf{v}_a e \mathbf{a}_a ; invece le stesse quantità viste da S' sono dette relative e indicate con \mathbf{v}_r e \mathbf{a}_r rispettivamente. Si vuole

³Questione a stretto rigore opinabile ma che si assume tacitamente come vera nel campo della scienza, lasciando all'indagine precipuamente filosofica affrontare il problema.

determinare la relazione tra quantità assolute e relative, noto il moto di S' rispetto ad S . Si osservi che, indicando con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base di S e con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base di S' , si ha che S vede i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ costanti mentre S' vede costanti $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Introduciamo i simboli

$$\frac{d_a}{dt}, \quad \frac{d_r}{dt}$$

per indicare rispettivamente la derivata assoluta (calcolata da S) e quella relativa (calcolata da S').

Proposizione 2.9.10. *Nella situazione appena descritta, sia $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^3$ un vettore variabile con t . Allora*

$$\frac{d_a \mathbf{u}(t)}{dt} = \frac{d_r \mathbf{u}(t)}{dt} + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{u}(t). \quad (2.9.6)$$

Dimostrazione. Si osservi che $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una base di \mathbb{R}^3 anche per S però dipendente da t . Pertanto $\mathbf{u}(t)$ si può esprimere come combinazione lineare degli elementi di tale base, cioè

$$\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{i}(t) + u_2(t)\mathbf{j}(t) + u_3(t)\mathbf{k}(t).$$

Calcolando la derivata assoluta di ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{u}(t)}{dt} &= \frac{d_a}{dt}(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) = \\ &= \dot{u}_1\mathbf{i} + \dot{u}_2\mathbf{j} + \dot{u}_3\mathbf{k} + u_1 \frac{d_a \mathbf{i}}{dt} + u_2 \frac{d_a \mathbf{j}}{dt} + u_3 \frac{d_a \mathbf{k}}{dt} = \\ &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + u_1 \frac{d_a \mathbf{i}}{dt} + u_2 \frac{d_a \mathbf{j}}{dt} + u_3 \frac{d_a \mathbf{k}}{dt}. \end{aligned}$$

Inoltre per le formule di Poisson segue che

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{u}(t)}{dt} &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + u_1 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + u_2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} + u_3 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} = \\ &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}) = \\ &= \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Definizione 2.9.3. Si dice velocità di trascinamento di un punto P all'istante t la velocità (rispetto ad S) del punto solidale a S' che all'istante considerato transita per P .

Osservazione 2.9.9. La velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T(P)$ è la velocità che competerebbe a P se esso si muovesse in modo solidale a S'

$$\mathbf{v}_T(P) = \mathbf{v}_a(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

Teorema 2.9.11 (dei moti relativi). *Sia $P(t)$ un punto in moto nello spazio. Allora si ha che*

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_r(P) + \mathbf{v}_T(P),$$

detta legge galileana di composizione delle velocità.

Dimostrazione. Dalla definizione di derivata assoluta si ha che

$$\mathbf{v}_a(P) = \frac{d_a(P - \Omega)}{dt} = \frac{d_a(P - O)}{dt} + \frac{d_a(O - \Omega)}{dt}.$$

Inoltre per la (2.9.6) e osservando che $\frac{d_a(O - \Omega)}{dt} = \mathbf{v}_a(O)$ si ottiene che

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) + \mathbf{v}_a(O).$$

Essendo $\mathbf{v}_a(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) = \mathbf{v}_T(P)$, segue la tesi. \square

Definizione 2.9.4. Si dice accelerazione di trascinamento di un punto P all'istante t l'accelerazione (rispetto ad S) del punto solidale a S' che all'istante considerato transita per P .

Osservazione 2.9.10. L'accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_T(P)$ è l'accelerazione che competerebbe a P se esso si muovesse in modo solidale a S' . La sua espressione è quindi data da (2.9.5).

Teorema 2.9.12 (di Coriolis). *Sia $P(t)$ un punto in moto nello spazio. Allora si ha che*

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_T(P) + \mathbf{a}_c(P),$$

ove $\mathbf{a}_c(P) = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$, detta accelerazione complementare di Coriolis.

Dimostrazione. Per il Teorema dei moti relativi si ha che

$$\mathbf{a}_a(P) = \frac{d_a \mathbf{v}_a(P)}{dt} = \frac{d_a (\mathbf{v}_r(P) + \mathbf{v}_T(P))}{dt}. \quad (2.9.7)$$

Si ha

$$\frac{d_a \mathbf{v}_r(P)}{dt} = \frac{d_r \mathbf{v}_r(P)}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) = \mathbf{a}_r(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d_a \mathbf{v}_T}{dt} &= \frac{d_a}{dt} (\mathbf{v}_a(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) = \\
&= \mathbf{a}_a(O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{v}_a(P) - \mathbf{v}_a(O)) = \\
&= \mathbf{a}_a(O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\mathbf{v}_a(O) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) - \mathbf{v}_a(O)] = \\
&= \mathbf{a}_a(O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] = \\
&= \mathbf{a}_a(O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) = \\
&= \mathbf{a}_T(P) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P),
\end{aligned}$$

in cui l'ultimo passaggio si ottiene per la (2.9.5). Sostituendo nella (2.9.7) si ottiene

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_T(P) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(P),$$

da cui la tesi. □

Definizione 2.9.5. Due osservatori S ed S' si dicono galileianamente equivalenti se misurano la stessa accelerazione per P per ogni moto di P .

Proposizione 2.9.13. *Due osservatori S ed S' sono galileianamente equivalenti se e solo se l'uno si muove rispetto all'altro di moto traslatorio uniforme.*

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti, per ipotesi si ha che

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_r(P),$$

per ogni moto di P . Allora per il Teorema di Coriolis si ha

$$\mathbf{a}_T + \mathbf{a}_c = \mathbf{0},$$

per ogni moto di P . Moltiplicando scalarmente ambo i membri per \mathbf{v}_r e ricordando che $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$ si ottiene

$$\mathbf{a}_T \cdot \mathbf{v}_r + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r = 0,$$

per ogni moto di P . Allora, essendo $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r = 0$, ne segue che

$$\mathbf{a}_T \cdot \mathbf{v}_r = 0,$$

per ogni moto di P e dunque deve essere $\mathbf{a}_T = \mathbf{0}$. Ma poiché si aveva $\mathbf{a}_T + \mathbf{a}_c = \mathbf{0}$ per ogni moto di P , anche $\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$ per ogni moto di P . Di conseguenza si ha

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \tag{2.9.8}$$

per ogni $\mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^3$ e quindi deve essere $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Dalle relazioni ottenute si ha che il moto risulta puramente traslatorio. Inoltre, poiché $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, si ha

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_a(O) = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{v}_a(O) = \text{cost.}$ e quindi il moto è traslatorio uniforme.

La condizione è sufficiente. Infatti, assumiamo ora per ipotesi che

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_a(O) = \text{cost.}$$

Da queste relazioni segue che

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

e che

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_a(O) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] = \mathbf{0}.$$

Quindi

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_r(P) + \mathbf{a}_T(P) + \mathbf{a}_c(P) = \mathbf{a}_r(P).$$

□

Proposizione 2.9.14. *Si consideri un corpo \mathcal{B} in moto rigido. Sia S un sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ rispetto al quale \mathcal{B} ha velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Sia S' un sistema di riferimento $O'x'y'z$ mobile rispetto a S e avente rispetto a quest'ultimo velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_T$. Sia $\boldsymbol{\omega}_R$ la velocità angolare di \mathcal{B} rispetto a S' . Vale la relazione*

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_R + \boldsymbol{\omega}_T.$$

AGGIUNGERE FIGURA

Dimostrazione. Siano $P, O \in \mathcal{B}$. Le loro velocità sono legate dalla formula fondamentale della cinematica dei rigidi. In S , assunto come osservatore assoluto, si ha

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

In S' , assunto come osservatore relativo, si ha

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{v}_r(O) + \boldsymbol{\omega}_r \wedge (P - O).$$

D'altro canto per il teorema dei moti relativi

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_r(P) + \mathbf{v}_T(P),$$

ove la velocità relativa è data da

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{v}_r(O) + \boldsymbol{\omega}_R \wedge (P - O)$$

e quella di trascinamento da

$$\mathbf{v}_T(P) = \mathbf{v}_a(O') + \boldsymbol{\omega}_T \wedge (P - O').$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(P) &= \mathbf{v}_r(O) + \boldsymbol{\omega}_R \wedge (P - O) + \mathbf{v}_a(O') + \boldsymbol{\omega}_T \wedge (P - O') = \\ &= \mathbf{v}_r(O) + \boldsymbol{\omega}_R \wedge (P - O) + \mathbf{v}_a(O') + \boldsymbol{\omega}_T \wedge (P - O + O - O') = \\ &= \mathbf{v}_r(O) + \underbrace{\mathbf{v}_a(O') + \boldsymbol{\omega}_T \wedge (O - O')}_{\mathbf{v}_T(O)} + (\boldsymbol{\omega}_R + \boldsymbol{\omega}_T) \wedge (P - O) = \\ &= \mathbf{v}_a(O) + (\boldsymbol{\omega}_R + \boldsymbol{\omega}_T) \wedge (P - O) \end{aligned}$$

e confrontando con l'espressione di $\mathbf{v}_a(P)$ in S segue la tesi. \square

Osservazione 2.9.11. La precedente proprietà esprime il fatto che nella composizione di moti rigidi la velocità angolare è la somma delle velocità angolari relative ai singoli moti rigidi che intervengono nel moto composto. Ovviamente la relazione vale anche nel caso in cui si compongono un numero finito di moti rigidi. Una rilevante applicazione si ha nella determinazione dell'espressione della velocità angolare in un moto rigido in funzione degli angoli di Eulero. Tale espressione può dedursi direttamente per via puramente algebrica come vettoriale assiale associato alla matrice di spin ma preferiamo ottenerla tramite la proposizione sopra.

Nella determinazione del passaggio dalla base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dell'osservatore a quella solidale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, di fatto si compongono tre moti rigidi elementari: una rotazione attorno all'asse ζ dell'angolo di precessione φ , una rotazione attorno alla linea dei nodi dell'angolo di nutazione θ , una rotazione attorno all'asse z dell'angolo di rotazione propria ψ . Pertanto

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{k}.$$

Scriviamo tale espressione nella base solidale. con la stessa notazione usata nel paragrafo sugli angoli di Eulero, si ha

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{i} - \sin \psi \mathbf{j}$$

ed inoltre

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \mathbf{e}_2'' + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Essendo (AGGIUNGERE FIGURA) $\mathbf{e}_2'' = \sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}$, si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) \mathbf{i} + \left(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \right) \mathbf{j} + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{k}. \quad (2.9.9)$$

2.9.6 Moti rigidi piani

Definizione 2.9.6. Si dice che un corpo \mathcal{B} si muove di moto rigido piano se esiste un piano π solidale a \mathcal{B} che durante il moto si mantiene sovrapposto ad un piano fisso π^* .

Osservazione 2.9.12. In Figura 2.9 è rappresentato un corpo continuo che si muove di moto rigido piano. Poiché il punto P ha la stessa velocità di P^* allora è sufficiente studiare il moto del piano solidale al corpo.

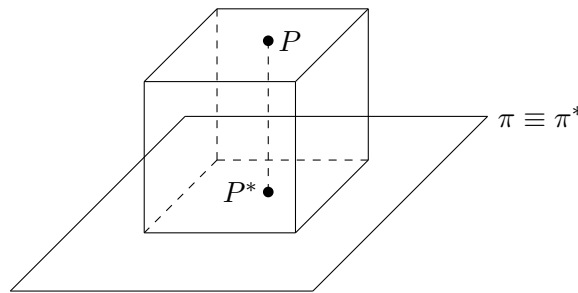


FIGURA 2.9: Esempio di moto piano.

Si fissi un sistema di riferimento $\Omega\xi\eta$ sul piano π . Per determinare i parametri liberi è sufficiente fissare sul piano solidale al corpo un punto $O = (\xi_0, \eta_0)$ e un sistema di riferimento Oxy . Così si determina un angolo ϑ , detto angolo di orientazione, che l'asse x forma con l'asse ξ . Pertanto i parametri liberi sono ξ_0, η_0 e ϑ e il sistema presenta quindi 3 g.d.l.. Sia $P \in \pi$ allora i vettori velocità \mathbf{v}_O e \mathbf{v}_P sono paralleli a π e quindi anche a π^* . Poiché il moto è rigido si ha

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O).$$

Se $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$ allora il moto è puramente traslatorio.

Se $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t > 0$ (ad eccezione eventualmente di istanti di tempo isolati ove la velocità angolare si annulla) allora $\boldsymbol{\omega}(t) \perp (P - O)$ per ogni $P, O \in \pi$ e quindi $\boldsymbol{\omega}(t) \perp \pi$. Pertanto $\boldsymbol{\omega}(t) \parallel \mathbf{e}_3$ e quindi il moto è rototraslatorio. L'invariante cinematico scalare si annulla

$$\mathcal{I}_c = \frac{\mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|} = 0$$

e quindi l'asse di Mozzi a_t rappresenta l'asse di istantanea rotazione in quanto tutti i suoi punti hanno velocità nulla.⁴ Inoltre l'asse di Mozzi muovendosi definisce una superficie

⁴Nell'introdurre l'asse di Mozzi in effetti si considera ad ogni istante l'atto di moto e quindi ad ogni punto dello spazio si associa una velocità secondo la formula della cinematica dei rigidi.

rigata.⁵

Definizione 2.9.7. La superficie definita dall'insieme delle configurazioni che assume l'asse di Mozzi nel tempo se *vista* nel sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ si dice rigata fissa, se *vista* nel sistema di riferimento $Oxyz$ si dice rigata mobile.

Definizione 2.9.8. Il punto $C_t := a_t \cap \pi$ si dice centro di istantanea rotazione.

Definizione 2.9.9. La curva descritta dal punto C_t nel sistema di riferimento $\Omega\xi\eta$ si chiama base, la curva descritta dal punto C_t nel sistema di riferimento Oxy si chiama rulletta.

AGGIUNGERE FIGURA

Osservazione 2.9.13. Base e rulletta hanno istante per istante il punto C_t in comune e poiché esso ha velocità nulla allora le due curve si muovono una sopra l'altra senza strisciare. Ovvero si dice che la rulletta rotola senza strisciare lungo la base.

Teorema 2.9.15 (di Charles). *Sia $P \in \mathcal{B} \cap \pi$ tale che $\mathbf{v}_P \neq \mathbf{0}$. Allora la retta giacente sul piano π , passante per P e ortogonale a \mathbf{v}_P contiene C_t .*

Dimostrazione. Si ha

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{C_t} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - C_t) = \boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - C_t).$$

Allora

$$(P(t) - C_t) \cdot \mathbf{v}_P = (P(t) - C_t) \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (P(t) - C_t) = 0$$

essendo un prodotto misto con due vettori uguali, da cui la tesi. \square

Esempio 2.9.4. Compasso ellittico. Si consideri su un piano un'asta AB di lunghezza L i cui estremi sono vincolati a muoversi su due guide rettilinee r ed s , perpendicolari tra loro, che si intersecano nel punto Ω . Introduciamo il sistema di riferimento fisso $\Omega\xi\eta$ con $\xi \equiv r$ ed $\eta \equiv s$ e il sistema di riferimento mobile Oxy avente $O \equiv A$, l'asse y coincidente con la retta di azione di $B - A$ e l'asse x perpendicolare a y e passante per O . Indichiamo con ϑ l'angolo compreso tra ξ e x . La situazione è rappresentata in Figura 2.10.

Durante il moto si ha che $\mathbf{v}_A // r$ e $\mathbf{v}_B // s$. Per il teorema di Chasles il centro di istantanea rotazione C_t resta individuato dalla intersezione delle rette per A e B ortogonali agli assi coordinati. C_t si muove nel tempo rimanendo a distanza costante e pari ad L da Ω e pertanto l'insieme delle posizioni occupabili da esso definisce in $\Omega\xi\eta$ la circonferenza di centro Ω e raggio L . Questa curva rappresenta la base.

⁵Una superficie rigata o semplicemente rigata è una superficie che si ottiene dal moto continuo di una retta (es. cilindro, cono, ...).

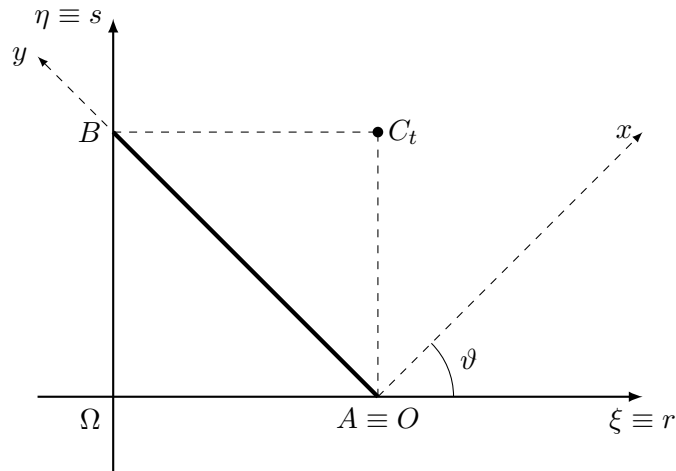


FIGURA 2.10: Rappresentazione grafica del compasso ellittico. AGGIUNGERE BASE E RULLETTA E PUNTO B

Per determinare la rulletta, osserviamo quanto segue. Se C_{t_1} e C_{t_2} sono le due posizioni che il centro di istantanea rotazione assume rispettivamente nei due istanti di tempo t_1 e t_2 , è possibile osservare che i triangoli ABC_{t_1} e ABC_{t_2} sono rettangoli la cui ipotenusa ha lunghezza costante e pari ad L . Pertanto nel sistema di riferimento Oxy , le posizioni occupabili dal centro di istantanea rotazione definiscono una circonferenza di centro nel punto medio di AB e raggio $L/2$ che costituisce la rulletta. Si osservi che base e rulletta sono sempre tangenti in C_t .

Se pensiamo di "materializzare" la base e la rulletta, nel moto di un compasso ellittico una circonferenza di raggio $L/2$ ruota senza strisciare all'interno di una circonferenza di raggio L (moto ipocicloidale).

Supponiamo adesso di fissare un punto P sull'asta a distanza b da B . Le coordinate di P rispetto alla terna fissa sono date da

$$\xi_P = b \sin \theta, \quad \eta_P = (L - b) \cos \theta$$

e quindi

$$\frac{\xi_P^2}{b^2} + \frac{\eta_P^2}{(L - b)^2} = 1,$$

ovvero il punto P descrive una ellisse di semiassi b e $L - b$, da cui il nome di compasso ellittico dato al caso in esame.

Capitolo 3

La geometria delle masse

In questo capitolo si prendono in esame le proprietà relative alle distribuzioni delle masse in un corpo. Similmente a quanto fatto in cinematica la trattazione differisce a seconda che il corpo venga schematizzato come un sistema discreto di punti materiali o come un sistema continuo.

3.1 Centro di massa

Prendiamo dapprima in esame il caso di un sistema discreto di punti materiali. Come sarà meglio chiarito in dinamica, ad ogni punto materiale si associa una grandezza scalare positiva detta massa.

Definizione 3.1.1. Si dice punto materiale una coppia (P, m) con $P \in \mathcal{E}$ e $m \in \mathbb{R}^+$, essendo m la massa di P .

Definizione 3.1.2. Si chiama sistema discreto di punti materiali un insieme Σ definito da $\Sigma = \{(P_i, m_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ ove $P_i \in \mathcal{E}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ e $m_i \in \mathbb{R}^+$ massa di P_i per ogni $i = 1, 2, \dots, N$.

Definizione 3.1.3. Fissato un punto $O \in \mathcal{E}$ e dato un sistema discreto di punti materiali Σ si dice centro di massa o baricentro di Σ il punto $G \in \mathcal{E}$ tale che

$$G - O = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O),$$

ove $M = \sum_{i=1}^N m_i$ è detta massa totale di Σ .

Osservazione 3.1.1. Più in dettaglio le coordinate di G sono date da

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i(x_i - x_O), \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i(y_i - y_O), \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i(z_i - z_O).$$

ove (x_i, y_i, z_i) e (x_O, y_O, z_O) sono le coordinate dei punti P_i e del polo O .

Osservazione 3.1.2. La definizione di centro di massa è formalmente analoga a quella di centro per un sistema di vettori applicati paralleli concordi. Pertanto per il centro di massa valgono le medesime proprietà, in particolare: se tutti i punti materiali stanno su una stessa retta (o piano) allora il centro di massa sta anch'esso sulla stessa retta (o piano); il centro di massa appartiene al più piccolo involucro convesso contenente tutti i punti.

Trattiamo adesso il caso continuo.

Definizione 3.1.4. Dato un corpo continuo \mathcal{B} si chiama densità una funzione

$$\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tale che

$$\int_{\mathcal{S}} \rho d\mathcal{B} = M_{\mathcal{S}}$$

rappresenta la massa del sottocorpo per ogni sottocorpo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. In particolare $\int_{\mathcal{B}} \rho d\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}} := M$ rappresenta la massa totale di \mathcal{B} .

Osservazione 3.1.3. Nel presente capitolo il tempo si intende fissato. In realtà la funzione densità potrebbe variare con t .

Definizione 3.1.5. Fissato un punto $O \in \mathcal{E}$ e dato un corpo continuo \mathcal{B} si dice centro di massa di \mathcal{B} il punto $G \in \mathcal{E}$ tale che

$$G - O = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \rho(P - O) d\mathcal{B},$$

dove ρ è la densità di \mathcal{B} e $M = \int_{\mathcal{B}} \rho d\mathcal{B}$ è la massa di \mathcal{B} .

Osservazione 3.1.4. Più in dettaglio le coordinate di G sono date da

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \rho(x - x_O) d\mathcal{B}, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \rho(y - y_O) d\mathcal{B}, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \rho(z - z_O) d\mathcal{B}.$$

Osservazione 3.1.5. Se il corpo continuo \mathcal{B} è omogeneo, cioè $\rho = \rho_0 = \text{cost.}$, allora si ha

$$G - O = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \rho_0(P - O) d\mathcal{B},$$

con

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho_0 d\mathcal{B} = \rho_0 \text{mis } \mathcal{B}.$$

Quindi si ottiene

$$G - O = \frac{1}{\text{mis } \mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} (P - O) d\mathcal{B},$$

cioè per i corpi omogenei il centro di massa corrisponde con il centro geometrico.

Diamo adesso alcuni criteri che risultano utili ai fini della determinazione dell'ubicazione del baricentro.

Definizione 3.1.6. Un piano π dicesi diametrale coniugato alla direzione individuata da una retta s per un sistema materiale, se i punti del sistema che non appartengono a π possono essere suddivisi in coppie del tipo P', P'' di stessa massa (nel caso discreto) o di stessa densità (nel caso continuo) tali che $P' - P''$ è parallelo a s e bisecato da π .

Proposizione 3.1.1. *Se un sistema materiale ammette un piano diametrale coniugato π allora $G \in \pi$.*

Definizione 3.1.7. Una retta r dicesi diametrale coniugata alla direzione individuata da una retta s per un sistema materiale piano, se i punti del sistema che non appartengono a r possono essere suddivisi in coppie del tipo P', P'' di stessa massa (nel caso discreto) o di stessa densità (nel caso continuo) tali che $P' - P''$ è parallelo a r e bisecato da r .

Proposizione 3.1.2. *Se un sistema materiale ammette una retta diametrale coniugata r allora $G \in r$.*

Esempio 3.1.1. Baricentro di un'asta omogenea

Esempio 3.1.2. Baricentro di un'asta non omogenea

Esempio 3.1.3. Baricentro di un arco di circonferenza omogenea

Esempio 3.1.4. Baricentro di un triangolo omogeneo

Esempio 3.1.5. Baricentro di un settore circolare omogeneo

Esempio 3.1.6. Baricentro di un cono circolare retto omogeneo

Esempio 3.1.7. Occhio circolare omogeneo

3.2 Momenti d'inerzia

Definizione 3.2.1. Dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ e una retta r si chiama momento di inerzia o momento assiale di Σ rispetto ad r la quantità

$$\mathcal{I}_r = \sum_{i=1}^N m_i d^2(P_i, r), \quad (3.2.1)$$

dove $d(P_i, r)$ è la distanza del punto P_i dalla retta r .

Osservazione 3.2.1. Sia \mathbf{u} il versore della retta r e si fissi un punto $O \in r$. Considerato il vettore $(P_i - O) \wedge \mathbf{u}$ si ha che

$$|(P_i - O) \wedge \mathbf{u}| = |P_i - O| \sin \vartheta,$$

essendo ϑ l'angolo che il vettore $P_i - O$ forma con il versore \mathbf{u} . In questo modo la (3.2.1) può essere riscritta come

$$\mathcal{I}_r = \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - O) \wedge \mathbf{u}|^2. \quad (3.2.2)$$

Nel caso continuo si ha la seguente definizione.

Definizione 3.2.2. Dato un corpo continuo \mathcal{B} avente densità ρ e una retta r si chiama momento di inerzia di \mathcal{B} rispetto ad r la quantità

$$\mathcal{I}_r = \int_{\mathcal{B}} \rho |(P - O) \wedge \mathbf{u}|^2 d\mathcal{B},$$

essendo \mathbf{u} il versore di r e $O \in r$.

Teorema 3.2.1 (Huygens-Steiner). *Dato un sistema di punti materiali (discreto o continuo) e un fascio di rette parallele al versore assegnato \mathbf{u} , sia G il centro di massa del sistema e r_G la retta del fascio passante per G . Allora si ha che*

$$\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_{r_G} + M d^2(G, r), \quad (3.2.3)$$

dove r è la generica retta del fascio e M è la massa totale del sistema.

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione nel solo caso in cui si abbia un sistema discreto $\Sigma = \{(P_i, m_i), i = 1, 2, \dots, N\}$. Sia $O \in r$ e si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r &= \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - O) \wedge \mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - G + G - O) \wedge \mathbf{u}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - G) \wedge \mathbf{u} + (G - O) \wedge \mathbf{u}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - G) \wedge \mathbf{u}|^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - G) \wedge \mathbf{u}] \cdot (G - O) \wedge \mathbf{u} + \sum_{i=1}^N m_i |(G - O) \wedge \mathbf{u}|^2 \\ &= \mathcal{I}_{r_G} + 2[(G - O) \wedge \mathbf{u}] \cdot \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - G) \wedge \mathbf{u}] + |(G - O) \wedge \mathbf{u}|^2 \sum_{i=1}^N m_i \\ &= \mathcal{I}_{r_G} + M d^2(G, r), \end{aligned}$$

in quanto dalla definizione di centro di massa

$$\sum_{i=1}^N m_i [(P_i - G) \wedge \mathbf{u}] = \mathbf{0}.$$

□

Osservazione 3.2.2. Poiché $Md^2(G, r) \geq 0$ allora per ogni $r \neq r_G$ si ha che $\mathcal{I}_r > \mathcal{I}_{r_G}$.

Osservazione 3.2.3. Date due generiche rette del fascio r e r' i momenti di inerzia si scrivono

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r &= \mathcal{I}_{r_G} + Md^2(G, r), \\ \mathcal{I}_{r'} &= \mathcal{I}_{r_G} + Md^2(G, r'), \end{aligned}$$

quindi sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti si ottiene la relazione

$$\mathcal{I}_r - \mathcal{I}_{r'} = M[d^2(G, r) - d^2(G, r')].$$

Esempio 3.2.1. Momento d'inerzia di un'asta omogenea.

Esempio 3.2.2. Momento d'inerzia di un triangolo omogeneo rispetto ad un lato.

3.2.1 Matrice d'inerzia

Sia dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ e il fascio di rette di centro proprio O . Si consideri un sistema di riferimento ortonormale levogiro $Oxyz$, di versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Sia r una retta del fascio e $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un suo versore. Dalla definizione di momento di inerzia si ha

$$\mathcal{I}_r = \sum_{i=1}^N m_i |(P_i - O) \wedge \mathbf{u}|^2.$$

Tenendo conto che

$$(P_i - O) \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_i & y_i & z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (y_i\gamma - z_i\beta)\mathbf{e}_1 + (z_i\alpha - x_i\gamma)\mathbf{e}_2 + (x_i\beta - y_i\alpha)\mathbf{e}_3,$$

ne segue che \mathcal{I}_r è una forma quadratica in α, β e γ

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r &= \sum_{i=1}^N m_i [(y_i\gamma - z_i\beta)^2 + (z_i\alpha - x_i\gamma)^2 + (x_i\beta - y_i\alpha)^2] \\ &= I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + I_{12}\alpha\beta + I_{13}\alpha\gamma + I_{23}\beta\gamma, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
 I_{22} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \\
 I_{33} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)
 \end{aligned}$$

sono rispettivamente i momenti di inerzia rispetto all'asse x , y e z , mentre

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \\
 I_{13} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\
 I_{23} &= - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i
 \end{aligned}$$

sono i momenti di deviazione o deviatorici. A partire da questi elementi è possibile definire la matrice simmetrica

$$[\sigma_O]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

detta matrice di inerzia rispetto al polo O relativamente alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Allora è possibile scrivere il momento di inerzia nella forma compatta

$$\mathcal{I}_r = \mathbf{u}^T [\sigma_O]_{\mathcal{B}} \mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Si osservi che per il teorema spettrale esiste una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ di autovettori di $[\sigma_O]_{\mathcal{B}}$ e rispetto a tale base la matrice di inerzia è diagonale

$$[\sigma_O]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

La base \mathcal{B}' prende il nome di *terna principale relativa al polo O* .

Definizione 3.2.3. Se $O = G$ si parla di matrice centrale d'inerzia. La terna principale

relativa a G si dice terna principale centrale.

Nel caso continuo gli elementi della matrice d'inerzia sono dati da

$$I_{11} = \int_{\mathcal{B}} \rho(y^2 + z^2) d\mathcal{B}, \quad I_{22} = \int_{\mathcal{B}} \rho(x^2 + z^2) d\mathcal{B}, \quad I_{33} = \int_{\mathcal{B}} \rho(x^2 + y^2) d\mathcal{B}, \quad (3.2.7)$$

$$I_{12} = - \int_{\mathcal{B}} \rho xy d\mathcal{B}, \quad I_{13} = - \int_{\mathcal{B}} \rho xz d\mathcal{B}, \quad I_{23} = - \int_{\mathcal{B}} \rho yz d\mathcal{B}. \quad (3.2.8)$$

Assegnato un polo una terna principale relativa ad esso può essere determinata per via puramente algebrica valutando gli autovalori e gli autovettori della matrice d'inerzia. In taluni casi, si può procedere sfruttando le simmetrie geometrico-materiali del sistema come stabilito dai criteri che seguono.

Proposizione 3.2.2. *Se un sistema materiale ammette un piano π di simmetria geometrico-materiale retta, cioè un piano diametrale coniugato alla direzione ortogonale, allora per ogni polo $O \in \pi$ la retta per O ortogonale a π è un asse principale relativo al polo O .*

Proposizione 3.2.3. *Se i punti di un sistema materiale giacciono su di un piano π e se esiste una retta $r \subseteq \pi$ di simmetria geometrico-materiale retta, allora per ogni polo $O \in \pi$ la retta per O ortogonale a π e la stessa retta r sono assi principali relativi al polo O .*

Osservazione 3.2.4. Nel caso della proposizione precedente il terzo asse principale è quello passante per O , giacente su π e ortogonale a r .

Nella terna principale relativa ad un polo O , la corrispondente matrice d'inerzia si scrive in forma diagonale con termini diagonali che sono i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi principali e quindi, se escludiamo il caso degenere di un sistema costituito di punti allineati, gli autovalori sono positivi. Si possono presentare tre casi:

1. gli autovalori sono tutti distinti. In tal caso, a meno di una permutazione degli assi, si ha una sola terna principale;
2. due degli autovalori coincidono. In corrispondenza all'autovalore doppio resta associato un autospazio di dimensione due. Pertanto si hanno ∞^1 terne principali, che si ottengono ruotando gli assi attorno all'asse di direzione l'autovalore singolo. In questo caso si dice che la matrice d'inerzia è rotonda.
3. tutti e tre gli autovalori coincidono. In tal caso ogni terna di centro O risulta principale e si dice che la matrice d'inerzia è di sferica.

Proposizione 3.2.4. *Se un sistema materiale ammette due piani di simmetria geometrico-materiale non ortogonali tra loro allora la matrice d'inerzia relativa ad un polo appartenente alla intersezione di tali piani è rotonda. Similmente se un sistema piano ammette due rette di simmetria geometrico-materiale non ortogonali tra loro allora la matrice d'inerzia relativa ad un polo appartenente alla intersezione di tali rette è rotonda.*

Osservazione 3.2.5. Se un sistema piano ha la matrice d'inerzia rotonda rispetto ad un polo O allora il momento d'inerzia è lo stesso per tutte le rette sul piano del sistema passanti per O .

Definizione 3.2.4. Un sistema materiale si dice a struttura giroscopica se la sua matrice principale d'inerzia è rotonda.

Osservazione 3.2.6. Se un sistema materiale è dato dall'unione di due sottosistemi materiali tra di loro disgiunti nel caso discreto o con gli interni disgiunti nel caso continuo, allora la matrice d'inerzia relativa ad un polo si può determinare come somma delle matrici d'inerzia dei sottosistemi relative al medesimo polo.

Esempio 3.2.3. Matrice d'inerzia di un rettangolo omogeneo.

Esempio 3.2.4. Matrice d'inerzia di un quadrato omogeneo forato.

Esempio 3.2.5. Matrice d'inerzia di un cerchio omogeneo.

Esempio 3.2.6. Matrice d'inerzia di una sfera omogenea.

Esempio 3.2.7. Matrice d'inerzia di una superficie sferica omogenea.

Esempio 3.2.8. Matrice d'inerzia di un cono circolare retto omogeneo.

3.2.2 Formule di variazione della matrice d'inerzia

Proposizione 3.2.5. *Dato un sistema materiale e due sistemi di riferimento $Oxyz$ e $Gx'y'z'$ ad assi paralleli, vale la seguente relazione nota formula di trasposizione della matrice d'inerzia*

$$[\sigma_O] = [\sigma_G] + M \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

ove per comodità di scrittura si è sottintesa la base.

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione nel caso di un sistema discreto di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i), i = 1, 2, \dots, N\}$. Siano (x_G, y_G, z_G) le coordinate di G rispetto al sistema

di riferimento $Oxyz$. Essendo i due sistemi di riferimento legati da una traslazione, il cambiamento di coordinate è dato da

$$\begin{cases} x = x' + x_G \\ y = y' + y_G \\ z = z' + z_G \end{cases}$$

La trasformazione degli elementi diagonali segue dal teorema di Huygen-Steiner. Calcoliamo gli elementi non diagonali. Valutiamo I_{12} ; si ha

$$I_{12} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = - \sum_{i=1}^N m_i (x'_i + x_G) (y'_i + y_G) = I'_{12} - M x_G y_G,$$

ove $I'_{12} = - \sum_{i=1}^N m_i x'_i y'_i$ e si è tenuto conto che $\sum_{i=1}^N m_i x'_i = \sum_{i=1}^N m_i y'_i = 0$ dalla definizione di centro di massa scegliendo come polo lo stesso G . \square

Proposizione 3.2.6. *Se un polo O appartiene ad un asse principale baricentrale allora la terna principale in O si ottiene trasladando quella principale centrale.*

Esempio 3.2.9. Terna principale rispetto a un polo arbitrario per un cerchio omogeneo.

Osservazione 3.2.7. Le matrici d'inezia relative al medesimo polo O ma rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ sono legate dalla relazione vista nel primo capitolo

$$[\sigma_O]_{\mathcal{B}'} = R [\sigma_O]_{\mathcal{B}} R^T,$$

ove R rappresenta la matrice di rotazione del cambiamento di base.

Esempio 3.2.10. Rettangolo omogeneo ruotato.

Capitolo 4

La dinamica

4.1 I principi della dinamica

La dinamica studia il movimento in relazione alle cause che lo determinano. I principi della dinamica furono compiutamente formulati per la prima volta da Newton nei *Philosophie Naturalis Principia Mathematica*, la cui prima edizione vide la luce nel 1687. Successivamente la presentazione assiomatica dei principi della dinamica fu oggetto di formulazioni più soddisfacenti da un punto di vista logico-formale. Nelle presenti note si adotteranno i postulati della dinamica nella versione attribuita a Kirchhoff e Mach.

I principi della dinamica partono dall'analisi di alcune situazioni limite, realizzabili solo con esperimenti di tipo concettuale, per poi essere estesi a casi via via più complessi.

Definizione 4.1.1. Un punto materiale P si dice isolato se è idealmente posto a distanza infinita dagli altri corpi dell'universo.

Definizione 4.1.2. Dato un punto materiale P isolato, si dice che un osservatore S è *inerziale* se misura accelerazione nulla per P per ogni $t > 0$ e qualunque sia lo stato cinematico di P .

Assioma 1 (di inerzia). *Esiste un osservatore inerziale.*

Osservazione 4.1.1. Tutti gli osservatori galileianamente equivalenti a quello dell'Assioma 1 sono anch'essi inerziali.

Osservazione 4.1.2. Gli assiomi della dinamica, ove non precisato diversamente, sono dati nell'ambito della famiglia degli osservatori inerziali.

Da questo punto in avanti nella presenta sezione, se non è scritto espressamente il contrario, ci si riferirà sempre ad osservatori inerziali.

Assioma 2. *L'accelerazione di un punto materiale P in presenza dei soli punti materiali P_1, P_2, \dots, P_N dipende solamente dalla costituzione fisica, posizione e velocità di P_1, P_2, \dots, P_N . Inoltre tale accelerazione tende a $\mathbf{0}$ se $d(P, P_i) \mapsto +\infty$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$.*

Definizione 4.1.3. Un sistema di punti materiali $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ si dice isolato se i punti che lo costituiscono interagiscono soltanto tra loro, in altre parole se Σ è posto a distanza infinita dal resto dell'universo. Inoltre si indica con \mathbf{a}_{ij} l'accelerazione di P_i in presenza del solo punto P_j .

Assioma 3. *Ad ogni punto materiale resta associata una quantità scalare positiva, detta massa inerziale, godente della seguente proprietà. Se $\{P_i, P_j\}$ è un sistema isolato con P_i di massa inerziale m_i e P_j di massa inerziale m_j allora, se $\mathbf{a}_{ji} \neq \mathbf{0}$, si ha*

$$\frac{|\mathbf{a}_{ij}|}{|\mathbf{a}_{ji}|} = \frac{m_j}{m_i}.$$

Assioma 4. *La massa inerziale è invariante per cambiamenti di osservatore, anche da uno inerziale ad uno non inerziale.*

Si consideri il sistema materiale costituito da $\{(P_i, m_i), (P_j, m_j)\}$ e si supponga che esso sia isolato. Poichè lo spazio è isotropo, l'unica direzione che si riesce a determinare è la congiungente i punti P_i e P_j . Pertanto è naturale supporre che la direzione dell'accelerazione sia proprio quella di tale congiungente. Inoltre, poichè vi deve essere simmetria, i versi delle due accelerazioni devono essere opposti. Ciò conduce all'assioma seguente.

Assioma 5. *Sia $\{(P_i, m_i), (P_j, m_j)\}$ un sistema isolato e siano \mathbf{a}_{ij} e \mathbf{a}_{ji} come nella Definizione 4.1.3. \mathbf{a}_{ij} e \mathbf{a}_{ji} sono dirette lungo la congiungente P_i e P_j e hanno versi opposti.*

Assioma 6. *Dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ isolato, l'accelerazione del generico punto P_j di Σ è data da*

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{a}_{ji}, \quad (4.1.1)$$

ove \mathbf{a}_{ji} è l'accelerazione di P_j se si trovasse in presenza del solo punto P_i .

Osservazione 4.1.3. La relazione precedente esprime il fatto che per le accelerazioni vale un principio di sovrapposizione degli effetti.

Definizione 4.1.4. Dato un punto materiale (P, m) avente accelerazione \mathbf{a}_P , si dice forza agente su P la quantità

$$\mathbf{F} := m\mathbf{a}_P. \quad (4.1.2)$$

Osservazione 4.1.4. La forza \mathbf{F} è invariante per cambiamento di osservatori inerziali. Infatti la massa non cambia ma neanche l'accelerazione per definizione di osservatore inerziale.

Osservazione 4.1.5. Dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ isolato, indicando con \mathbf{F}_{ji} la forza agente su P_j in presenza del solo punto P_i , cioè $\mathbf{F}_{ji} = m_j \mathbf{a}_{ji}$, si ha che la forza agente su P_j è

$$\mathbf{F}_j = m_j \mathbf{a}_j = m_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{a}_{ji} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ji}. \quad (4.1.3)$$

Assioma 7. \mathbf{F}_j è una funzione dei punti materiali e delle loro velocità, cioè

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(P_1, P_2, \dots, P_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N). \quad (4.1.4)$$

Tale funzione è detta legge di forza ed è invariante anche passando da un osservatore inerziale ad uno non inerziale.

Proposizione 4.1.1 (Principio di azione e reazione). *Dato il sistema isolato di punti materiali $\Sigma = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$ si ha che il sistema di vettori applicati $\Sigma_F = \{(P_1, \mathbf{F}_{12}), (P_2, \mathbf{F}_{21})\}$ costituisce una coppia di braccio nullo.*

Dimostrazione. Poichè Σ è un sistema isolato costituito da due punti materiali, le accelerazioni \mathbf{a}_{12} e \mathbf{a}_{21} sono dirette lungo la congiungente i punti P_1 e P_2 e hanno versi opposti. Ciò vale anche per le forze \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} perchè proporzionali a tali accelerazioni. Rimane da dimostrare che $|\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}|$. Infatti, per l'Assioma 3, si ha

$$\frac{|\mathbf{F}_{21}|}{|\mathbf{F}_{12}|} = \frac{m_2 |\mathbf{a}_{21}|}{m_1 |\mathbf{a}_{12}|} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1}{m_2} = 1. \quad (4.1.5)$$

□

Osservazione 4.1.6. Nelle ipotesi della Proposizione 4.1.1, il vettore \mathbf{F}_{12} si chiama reazione di \mathbf{F}_{21} e viceversa.

Proposizione 4.1.2. *Dato il sistema isolato di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ si ha che il sistema di vettori applicati $\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ è equilibrato.*

4.2 La dinamica relativa

Sia dato un osservatore inerziale S , che considereremo come assoluto, caratterizzato dal sistema di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$. Sia dato pure un secondo osservatore S' , in generale non

inerziale, che consideremo relativo, caratterizzato dal sistema di riferimento di origine (in generale dipendente dal tempo rispetto a S) $O(t)$ e assi xyz . Sia $\boldsymbol{\omega}(t)$ il vettore velocità angolare del moto rigido di S' rispetto ad S .

Si consideri adesso il moto di un punto $P(t)$ nello spazio. Sia \mathbf{a}_a l'accelerazione di P viste da S (accelerazione assoluta) e sia \mathbf{a}_r la stessa quantità vista da S' (accelerazione relativa). Allora, se m è la massa inerziale di P , si ha che $\mathbf{F}_a = m\mathbf{a}_a$ è la forza associata a P da S e $\mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_r$ è la forza associata a P da S' . Si noti che in virtù dell'Assioma 4 la massa è la stessa nei due sistemi di riferimento. Dal Teorema di Coriolis segue che

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_r &= m\mathbf{a}_r = m\mathbf{a}_a - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_c \\ &= \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c,\end{aligned}$$

avendo posto $\mathbf{F}_T = -m\mathbf{a}_T$, detta *forza di trascinamento*, e $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$, detta *forza di Coriolis*. Esse si dicono anche sono forze apparenti e la loro presenza è legata al fatto che S' è non inerziale.

Da quanto sopra si ha che nel sistema S' vale la relazione

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c, \quad (4.2.1)$$

detta equazione fondamentale della dinamica relativa.

Osservazione 4.2.1. Dato il sistema isolato di punti materiali

$$\Sigma = \{(P, m), (P_1, m_1), (P_2, m_2), \dots, (P_N, m_N)\}$$

se

$$\frac{m}{m_i} \ll 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

allora l'equazione della dinamica di P ha la forma

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{F}(P, P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N),$$

mentre il moto dei P_i , $i = 1, 2, \dots, N$ è debolmente influenzato da quello di P .

Si può pertanto assumere che i punti P_i hanno legge oraria $P_i(t)$ nota per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ e l'equazione della dinamica di P si riduce a

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{F}(P, \mathbf{v}, t), \quad (4.2.2)$$

ove la dipendenza da esplicita da t racchiude l'influenza del moto dei punti P_i su P .

La relazione 4.2.2 costituisce l'equazione fondamentale della dinamica del punto materiale. In realtà essa non è una legge fondamentale.

Indicando con $P - O = (x(t), y(t), z(t))$ le componenti del vettore posizione di P al variare del tempo, si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t) \\ m\ddot{y} = F_y(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t) \\ m\ddot{z} = F_z(x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), t) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

che, assegnando il dato iniziale

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x_0} \\ \dot{y}(0) = v_{y_0} \\ \dot{z}(0) = v_{z_0} \end{cases}, \quad (4.2.4)$$

conduce ad un problema di Cauchy. Se per esso vale un teorema di esistenza e unicità allora è possibile predire univocamente il moto. Tale aspetti sono alla base del carattere deterministico della meccanica classica.

Esempio 4.2.1. Si consideri un sistema di riferimento S inerziale caratterizzato dagli assi $\Omega\xi\eta\zeta$ di base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Sia quindi $Oxyz$ un altro sistema di riferimento, indicato con S' , di base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Si supponga che $\Omega \equiv O$ e $\zeta \equiv z$ (e quindi $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{k}$), cioè che S' si muove rispetto a S di moto puramente rotatorio attorno a ζ con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$.

Determiniamo la forza di trascinato agente su di un punto materiale P di massa m . Sia \bar{P} la proiezione di P su $\zeta \equiv z$ e ϑ l'angolo che, ad ogni istante, ξ forma con x (si veda la figura). Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T &= \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)), \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$, perchè il punto O è fisso, e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, dato che $\boldsymbol{\omega}$ è costante. Inoltre, sommando e sottraendo il punto \bar{P} , si ha

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - \bar{P} + \bar{P} - O)),$$

da cui, osservando che $\bar{P} - O \parallel \boldsymbol{\omega}$, segue che

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - \bar{P})) = \boldsymbol{\omega} \cdot (P - \bar{P})\boldsymbol{\omega} - \omega^2(P - \bar{P}),$$

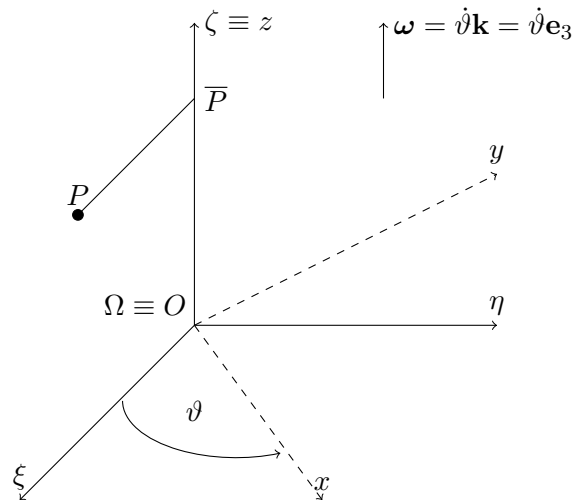


FIGURA 4.1: Punto materiale in moto puramente rotatorio.

e infine, poichè $\bar{P} - O \perp \boldsymbol{\omega}$, si ha che

$$\mathbf{a}_T = -\omega^2(P - \bar{P}) = -\dot{\vartheta}^2(P - \bar{P}).$$

Di conseguenza nel caso in esame la forza di trascinamento è pari a

$$\mathbf{F}_T = m\omega^2(P - \bar{P}) = \dot{\vartheta}^2(P - \bar{P}),$$

che prende il nome di *forza centrifuga* e tende ad allontanare il punto dall'asse di rotazione.

Esempio 4.2.2. Si consideri un punto materiale P collegato tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$ ad un estremo fisso O . Nel caso ideale la molla esercita sul

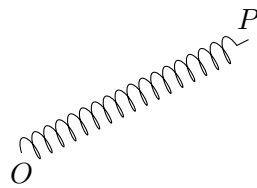


FIGURA 4.2: Molla ideale.

punto P una forza $\mathbf{F}(P)$ diretta, ad ogni istante, lungo la congiungente i punti O e P , di verso opposto al vettore posizione $P - O$ e proporzionale alla costante elastica della molla, cioè la legge di forza è data da

$$\mathbf{F}(P) = -k(P - O). \quad (4.2.5)$$

Esempio 4.2.3. Si considerino due punti P_1 e P_2 materiali collegati ad una molla ideale di costante elastica $k > 0$. Si ha così il sistema di vettori applicati $\Sigma_F = \{(P_1, \mathbf{F}_{12}), (P_2, \mathbf{F}_{21})\}$ e per il principio di azione e reazione si ha $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Le leggi

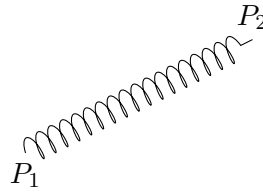


FIGURA 4.3: Molla ideale.

delle due forze sono date da

$$\mathbf{F}_{12} = -k(P_1 - P_2), \quad \mathbf{F}_{21} = -k(P_2 - P_1). \quad (4.2.6)$$

Esempio 4.2.4. Sia P un punto materiale di massa m posto in prossimità della superficie terrestre. Si suppone che la Terra sia una sfera che ruota su se stessa attorno all'asse di direzione Nord-Sud, con velocità angolare costante ω_T . Sia \mathbf{F}_G la forza di gravità cui è sottoposto il punto P . Essa è diretta lungo la congiungente i punti P e il centro della Terra O . Il verso di \mathbf{F}_G è concorde a quello del vettore $P - O$. Sia inoltre \bar{P} la proiezione di P sull'asse di rotazione. Si ha un sistema di riferimento non inerziale quindi, per la

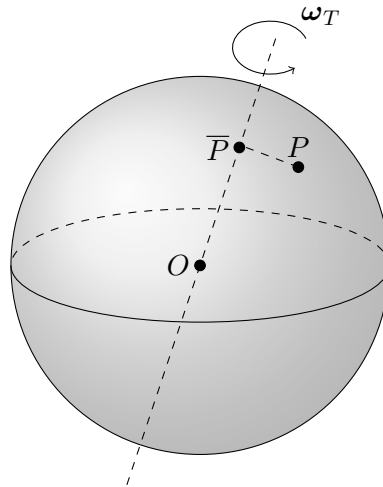


FIGURA 4.4: Punto sulla superficie terrestre.

legge della dinamica relativa, si ha

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_G - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_c.$$

Se il punto P è in equilibrio allora $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$.

Dalla (2.9.5), ricordando che ω_T è costante e trascurando \mathbf{a}_O , si ha

$$\mathbf{a}_T \approx \omega_T \wedge [\omega_T \wedge (P - O)] = \omega_T \wedge [\omega_T \wedge (P - \bar{P} + \bar{P} - O)].$$

Osservando che $\overline{P} - O \parallel \boldsymbol{\omega}_T$ segue che

$$\mathbf{a}_T \approx \boldsymbol{\omega}_T \wedge [\boldsymbol{\omega}_T \wedge (P - \overline{P})] = \boldsymbol{\omega}_T \cdot (P - \overline{P})\boldsymbol{\omega}_T - \boldsymbol{\omega}_T^2(P - \overline{P}),$$

da cui, poichè $P - \overline{P} \perp \boldsymbol{\omega}_T$, si ha infine

$$\mathbf{a}_T \approx -\boldsymbol{\omega}_T^2(P - \overline{P}).$$

Se m^* è la massa gravitazionale del punto P e m_T^* quella della terra allora la forza di gravità si esprime

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{m^* m_T^*}{|P - O|^3} (P - O),$$

dove G è una costante positiva, detta di gravitazione universale. Pertanto la legge della dinamica per il punto P si scrive

$$m\mathbf{a}_r = -G \frac{m^* m_T^*}{|P - O|^3} (P - O) + m\boldsymbol{\omega}_T^2(P - \overline{P}). \quad (4.2.7)$$

Osservazione 4.2.2. La massa inerziale e la massa gravitazionale a priori non sono la stessa quantità, tuttavia con buona approssimazione si può ritenere che assumo valori uguali come espresso dal principio che segue, sinora validato sperimentalmente con grande precisione.

Principio di equivalenza debole: la massa inerziale e la massa gravitazionale hanno lo stesso valore.

Osservazione 4.2.3. Nelle ipotesi dell'Esempio 4.2.4 e in virtù della Proposizione 4.2 la forza peso, indicata con \mathbf{P} , si può esprimere come

$$\mathbf{P} = m \left[-G \frac{m_T^*}{|P - O|^3} (P - O) + \boldsymbol{\omega}_T^2(P - \overline{P}) \right] = m\mathbf{g}, \quad (4.2.8)$$

dove \mathbf{g} è detta accelerazione di gravità che, con buona approssimazione, si può ritenere di modulo costante. La direzione della forza peso viene praticamente individuata dalla direzione del filo a piombo. Se le dimensioni tipiche dei problemi non sono molto ampie anche la direzione di \mathbf{g} si può ritenere costante.

Osservazione 4.2.4. Nei problemi studiati in prossimità della superficie terrestre e quindi da un osservatore solidale alla terra la forza di trascinamento è già inclusa nella forza peso e quindi andrebbe aggiunta come forza apparente solo quella di Coriolis. Se non entrano in gioco velocità sufficientemente elevate la forza di Coriolis risulta trascurabile con buona approssimazione, anche se risulta cruciale per spiegare la deviazione verso oriente dei gravi in caduta libera.

Esempio 4.2.5. Si consideri un grave di massa m in caduta libera nel vuoto, soggetto alla sola forza peso (si sta trascurando la forza di Coriolis). Si consideri un sistema di riferimento $Oxyz$ in cui il terzo asse sia orientato lungo la verticale (direzione del filo a piombo) ascendente. La dinamica di P è retta dalla equazione

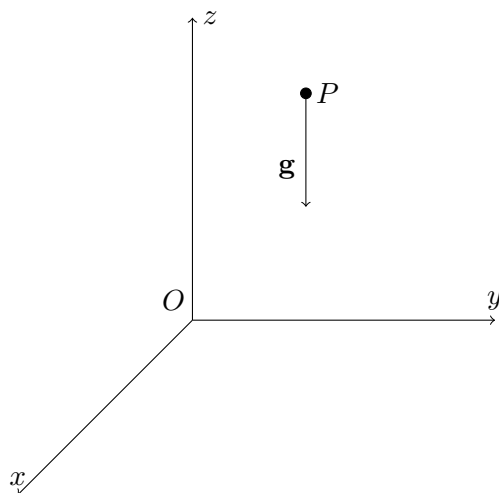


FIGURA 4.5: Caduta libera di un grave.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}. \quad (4.2.9)$$

In componenti, il vettore $P - O$ si scrive

$$P - O = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

mentre $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Pertanto dalla (4.2.9) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

che, assegnando le condizioni iniziali,

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_x^0 \\ \dot{y}(0) = v_y^0 \\ \dot{z}(0) = v_z^0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

è possibile integrare ottenendo la soluzione

$$\begin{cases} x(t) = v_x^0 t + x_0 \\ y(t) = v_y^0 t + y_0 \\ z(t) = -gt^2 + v_z^0 t + z_0 \end{cases}$$

che è la legge oraria di un moto parabolico. Nel caso particolare in cui il punto ha velocità iniziale nulla si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = -gt^2 + z_0 \end{cases}$$

che è la legge oraria di un moto verticale uniformemente accelerato.

4.3 Dinamica del punto materiale vincolato

Dato un punto materiale (P, m) l'equazione fondamentale della dinamica del punto materiale libero si scrive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t). \quad (4.3.1)$$

In presenza di vincoli occorre modificare tale equazione, premettendo il seguente assioma.

Assioma 8 (Postulato delle reazioni vincolari). *Ogni vincolo è assimilabile dinamicamente ad un sistema di forze.*

Pertanto l'equazione fondamentale della dinamica del punto materiale vincolato si scrive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(P, \dot{P}, t) + \mathbf{\Phi}, \quad (4.3.2)$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è una funzione incognita, detta reazione vincolare. In generale non vi è il pareggio tra il numero di equazioni e il numero delle incognite. Occorre pertanto introdurre delle opportune ipotesi sui vincoli.

La definizione seguente dà una caratterizzazione geometrica dei vincoli in assenza di attrito.

Definizione 4.3.1. Una superficie o una curva si dice liscia se espleta in ogni suo punto una reazione vincolare ad essa normale.

Definizione 4.3.2. Dato un punto materiale (P, m) soggetto a vincoli, sia P_0 una posizione consentita dai vincoli $\forall t \geq 0$. Si dice che P_0 è una configurazione di equilibrio

per (P, m) se date le condizioni iniziali

$$\begin{cases} P(0) = P_0 \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

segue che

$$P(t) = P_0 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.4)$$

Proposizione 4.3.1. *Dato un punto materiale (P, m) soggetto a vincoli, sia P_0 una configurazione compatibile con i vincoli $\forall t \geq 0$. P_0 è una configurazione di equilibrio per (P, m) se e solo se*

$$\mathbf{F}(P_0, \mathbf{0}, t) + \Phi(P_0, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.3.5)$$

Osservazione 4.3.1. Nel caso di vincoli mobili occorre verificare che P_0 sia compatibile con i vincoli per ogni $t \geq 0$. Nel caso di vincoli fissi basta effettuare tale verifica solo per $t = 0$.

4.3.1 Dinamica di un punto vincolato ad una curva liscia

Sia P un punto materiale vincolato ad una guida liscia. Allora, scelto come sistema di riferimento il triedro di Frenet, la reazione vincolare si decompone lungo la componenti normale e quella binormale, cioè

$$\Phi = \Phi_n \mathbf{n} + \Phi_b \mathbf{b}, \quad (4.3.6)$$

in quanto, poichè la guida è liscia, si ha che la componente lungo la tangente Φ_t si annulla.

Ricordando che

$$\mathbf{a} = \frac{d(\dot{s}\mathbf{t})}{dt} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\dot{s} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n},$$

l'equazione fondamentale della dinamica del punto materiale,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \Phi, \quad (4.3.7)$$

con \mathbf{F} di forma nota e Φ da determinare, diventa

$$m \left(\ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} \right) = \mathbf{F} + \Phi. \quad (4.3.8)$$

Si procede ora proiettando la (4.3.8) lungo i versori di base del triedro di Frenet. Proiettando lungo \mathbf{t} si ha

$$m \left(\ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} + \Phi \cdot \mathbf{t},$$

da cui, poichè $\Phi \cdot \mathbf{t} = 0$ dato che il vincolo è liscio, si ottiene

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t) \quad (4.3.9)$$

che rappresenta *l'equazione pura di moto* risolvendo la quale è possibile, almeno in iinea di principio, ottenere la legge oraria del moto del punto materiale. Proiettando invece lungo \mathbf{n} si ottiene

$$m \left(\ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \Phi \cdot \mathbf{n},$$

da cui

$$\Phi_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} - F_n(s, \dot{s}, t). \quad (4.3.10)$$

Infine proiettando lungo \mathbf{b} si ha

$$\mathbf{0} = m \left(\ddot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \Phi \cdot \mathbf{b},$$

da cui

$$\Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t). \quad (4.3.11)$$

Imponendo $s = s_0 = \text{cost.}$, dalla (4.3.9) si ottiene l'equazione pura di equilibrio

$$F_t(s_0, 0, t) = 0 \quad (4.3.12)$$

e le (4.3.10) e (4.3.11) consentono di ottenere le reazioni vincolari nelle eventuali configurazioni di equilibrio come segue

$$\begin{cases} \Phi_n = -F_n(s_0, 0, t) \\ \Phi_b = -F_b(s_0, 0, t) \end{cases} \quad (4.3.13)$$

Esempio 4.3.1. Si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R liscia e fissa, posta su un piano verticale. Si supponga inoltre che P sia collegato ad una molla di costante elastica k , avente l'altro estremo vincolato a muoversi lungo l'asse x e che si mantiene verticale durante il moto. La situazione è rappresentata in Figura 4.6. In questo caso l'equazione pura di moto si scrive

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - k(P - \bar{P}) + \Phi, \quad (4.3.14)$$

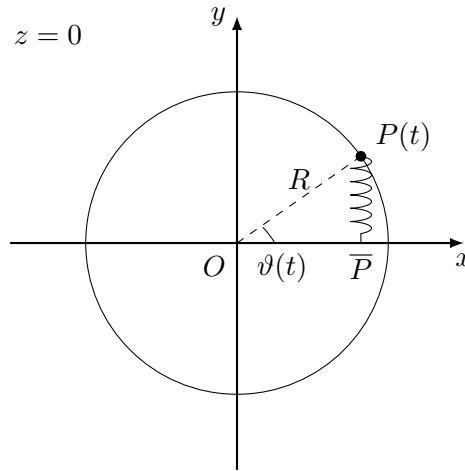


FIGURA 4.6: Punto materiale vincolato ad una guida circolare e collegato ad una molla.
(AGGIUNGERE ORIENTAZIONE ANGOLO)

essendo \mathbf{g} l'accelerazione di gravità. Ricordando che è possibile scrivere la reazione vincolare nella forma

$$\Phi = \Phi_n \mathbf{n} + \Phi_b \mathbf{b} \quad (4.3.15)$$

e l'accelerazione come

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \mathbf{n}, \quad (4.3.16)$$

essendo $s = R\vartheta$, si ha

$$\mathbf{a} = R\ddot{\vartheta} \mathbf{t} + R\dot{\vartheta}^2 \mathbf{n}, \quad (4.3.17)$$

i parametri incogniti saranno dunque ϑ , Φ_n e Φ_b . Essendo

$$P(s) - O = R \cos \vartheta \mathbf{i} + R \sin \vartheta \mathbf{j} = R \cos \frac{s}{R} \mathbf{i} + R \sin \frac{s}{R} \mathbf{j},$$

\mathbf{t} , \mathbf{n} e \mathbf{b} sono dati da

$$\mathbf{t}(s) = \frac{dP}{ds} = -\sin \frac{s}{R} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{R} \mathbf{j} = -\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j},$$

$$\mathbf{n}(s) = R \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\cos \frac{s}{R} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{R} \mathbf{j} = -\cos \vartheta \mathbf{i} - \sin \vartheta \mathbf{j},$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) \mathbf{k} = \mathbf{k}.$$

Poichè il moto non ha componenti lungo $\mathbf{b}(s)$, proiettando si ha $\Phi_b = 0$. Invece, proiettando lungo $\mathbf{t}(s)$ segue che

$$m \left(R\ddot{\vartheta} \mathbf{t} + R\dot{\vartheta}^2 \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t} = -mg \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} - kR \sin \vartheta \mathbf{j} \cdot \mathbf{t} + \Phi \cdot \mathbf{t}$$

da cui

$$mR\ddot{\vartheta} = -mg \cos \vartheta - kR \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Infine, proiettando lungo $\mathbf{n}(s)$ si ha

$$m \left(R\ddot{\vartheta} \mathbf{t} + R\dot{\vartheta}^2 \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} = -mg \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} - kR \sin \vartheta \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + \Phi \cdot \mathbf{n}$$

da cui

$$mR\dot{\vartheta}^2 = mg \sin \vartheta + kR \sin^2 \vartheta + \Phi_n.$$

In definitiva le equazioni di moto sono date da

$$\begin{cases} mR\ddot{\vartheta} = -mg \cos \vartheta - kR \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Phi_n = mR\dot{\vartheta}^2 - mg \sin \vartheta - kR \sin^2 \vartheta \\ \Phi_b = 0 \end{cases} \quad (4.3.18)$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio imponiamo $s = s_0 = \text{cost.}$ e quindi anche $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost.}$ Le equazioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} 0 = -mg \cos \vartheta_0 - kR \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \\ \Phi_n = -mg \sin \vartheta_0 - kR \sin^2 \vartheta_0 \\ \Phi_b = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\cos \vartheta_0 = 0 \quad \text{oppure} \quad \sin \vartheta_0 = -\frac{mg}{kR}.$$

Dalla prima relazione si ottengono le due soluzioni

$$\vartheta_0^{(1)} = -\frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_0^{(2)} = \frac{\pi}{2}.$$

Dalla seconda relazione, se $mg/kR \leq 1$, si ottengono le ulteriori soluzioni

$$\vartheta_0^{(3)} = -\arccos \frac{mg}{kR}, \quad \vartheta_0^{(4)} = \pi - \vartheta_0^{(3)}.$$

Infine è possibile determinare le reazioni vincolari nelle configurazioni di equilibrio. Ricordando che in questo caso la reazione vincolare ha soltanto componente normale, nelle configurazioni $\vartheta_0^{(1)}$ e $\vartheta_0^{(2)}$ essa ha direzione verticale e verso a seconda del segno della componente. In particolare sarà

$$\Phi_n \left(\vartheta_0^{(1)} \right) = mg - kR, \quad \Phi_n \left(\vartheta_0^{(2)} \right) = -mg - kR.$$

Invece, per quanto riguarda le altre due soluzioni, si ha

$$\Phi_n \left(\vartheta_0^{(3)} \right) = \Phi_n \left(\vartheta_0^{(4)} \right) = -mg \left(-\frac{mg}{kR} \right) - kR \left(-\frac{mg}{kR} \right)^2 = 0.$$

Si supponga adesso che il piano ruoti attorno all'asse verticale con velocità angolare costante ω . Si introduce quindi un sistema di riferimento nello spazio scegliendo gli assi x e y come nell'esempio precedente e z normale al piano xy . Sia inoltre P^* la proiezione di P sull'asse y . Nell'equazione di moto occorre dunque aggiungere la forza di trascinamento e la forza di Coriolis, cioè

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} - k(P - \bar{P}) - m\mathbf{a}_T - m\mathbf{a}_c + \mathbf{\Phi}, \quad (4.3.19)$$

essendo \mathbf{a}_r identica alla (4.3.17), \mathbf{a}_T data da

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) - \omega^2(P - P^*) = -\omega^2(P - P^*) = -\omega^2 R \cos \vartheta \mathbf{i}, \quad (4.3.20)$$

in quanto $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, e \mathbf{a}_c data da

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r = 2\omega \mathbf{j} \wedge \dot{s} \mathbf{t} = 2\omega \mathbf{j} \wedge R \dot{\vartheta} \mathbf{t} = 2\omega R \dot{\vartheta} \mathbf{j} \wedge \mathbf{t} = 2\omega R \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{k} = 2\omega R \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{b}. \quad (4.3.21)$$

Di conseguenza, proiettando \mathbf{a}_T lungo \mathbf{t} ed \mathbf{n} si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_T \cdot \mathbf{t} &= -\omega^2 R \cos \vartheta \mathbf{i} \cdot (-\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j}) = \omega^2 R \cos \vartheta \sin \vartheta, \\ \mathbf{a}_T \cdot \mathbf{n} &= -\omega^2 R \cos \vartheta \mathbf{i} \cdot (-\cos \vartheta \mathbf{i} - \sin \vartheta \mathbf{j}) = \omega^2 R \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Invece l'unica proiezione non nulla di \mathbf{a}_c è lungo \mathbf{b} ottenendo

$$\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b} = 2\omega R \dot{\vartheta} \sin \vartheta.$$

Quindi le equazioni di moto si modificano in

$$\begin{cases} mR\ddot{\vartheta} = -mg \cos \vartheta - kR \sin \vartheta \cos \vartheta - m\omega^2 R \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \Phi_n = mR\dot{\vartheta}^2 - mg \sin \vartheta - kR \sin^2 \vartheta + m\omega^2 R \cos^2 \vartheta \\ \Phi_b = 2m\omega R \dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{cases} \quad (4.3.22)$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio bisogna imporre $s = s_0 = \text{cost.}$ e quindi anche $\vartheta = \vartheta_0 = \text{cost.}$ Le condizioni di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} \cos \vartheta_0 [mg + \sin \vartheta_0 (kR + m\omega^2 R)] = 0 \\ \Phi_n = -mg \sin \vartheta_0 - kR \sin^2 \vartheta_0 + m\omega^2 R \cos^2 \vartheta_0 \\ \Phi_b = 0 \end{cases}$$

Risolviendo la prima equazione si hanno le soluzioni

$$\vartheta_0^{(1)} = -\frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_0^{(2)} = \frac{\pi}{2}$$

e, se $mg/(kR + m\omega^2 R) \leq 1$, si hanno anche le soluzioni

$$\vartheta_0^{(3)} = -\arcsin \frac{mg}{kR + m\omega^2 R}, \quad \vartheta_0^{(4)} = \pi - \vartheta_0^{(3)}.$$

Analogamente al caso precedente è possibile calcolare le reazioni vincolari in cui, anche in questo caso, l'unica componente non nulla è quella normale e si ottiene nuovamente

$$\Phi_n(\vartheta_0^{(1)}) = mg - kR, \quad \Phi_n(\vartheta_0^{(2)}) = -mg - kR.$$

Invece, per quanto riguarda le altre due soluzioni, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_n(\vartheta_0^{(3)}) = \Phi_n(\vartheta_0^{(4)}) &= -mg \left(-\frac{mg}{kR + m\omega^2 R} \right) - kR \left(-\frac{mg}{kR + m\omega^2 R} \right)^2 \\ &\quad + m\omega^2 R \left[1 - \left(-\frac{mg}{kR + m\omega^2 R} \right)^2 \right] \\ &= \frac{m^2 g^2}{kR + m\omega^2 R} - \frac{kR m^2 g^2}{(kR + m\omega^2 R)^2} + m\omega^2 R - \frac{m^3 \omega^2 R g^2}{(kR + m\omega^2 R)^2}. \end{aligned}$$

4.3.2 Dinamica di un punto materiale vincolato ad una superficie liscia

Sia P un punto materiale vincolato ad una superficie fissa liscia di equazione $f(x, y, z) = 0$, con rappresentazione parametrica data da

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases} \quad (4.3.23)$$

con q_1 e q_2 parametri lagrangiani. La reazione vincolare è del tipo

$$\Phi(P) = \lambda(P) \nabla f(P). \quad (4.3.24)$$

Proiettando lungo i vettori

$$\frac{\partial P}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial q_2},$$

tangenti alla superficie, si ottengono le equazioni pure di moto

$$\begin{cases} m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_1} \\ m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_2} \end{cases} \quad (4.3.25)$$

Proiettando poi l'equazione di moto lungo ∇f si ottiene

$$m\mathbf{a} \cdot \nabla f = \mathbf{F} \cdot \nabla f + \lambda |\nabla f|^2,$$

da cui, osservando che $|\nabla f|^2 \neq 0$, essendo la superficie regolare, segue che

$$\lambda = \frac{m\mathbf{a} \cdot \nabla f - \mathbf{F} \cdot \nabla f}{|\nabla f|^2}. \quad (4.3.26)$$

Esempio 4.3.2. In un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ si consideri un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi su un paraboloide liscio di equazione $f(x, y, z) = 0$ con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. L'equazione pura di moto si scrive

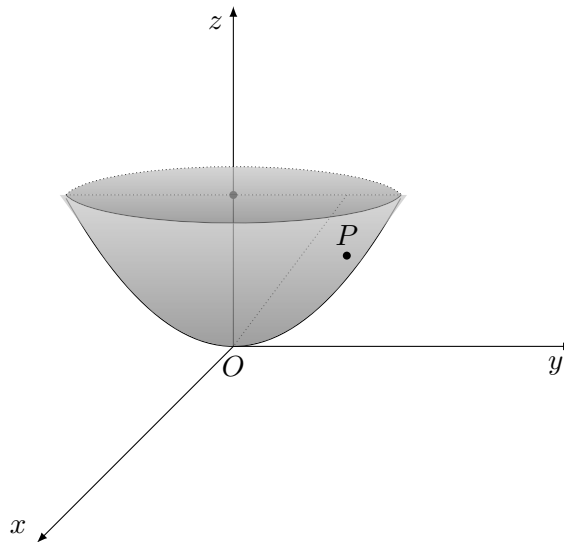


FIGURA 4.7: Punto materiale vincolato ad un paraboloide liscio.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \Phi,$$

con

$$\Phi = \lambda(P)\nabla f$$

essendo in questo caso $\nabla f = (2x, 2y, -1)$. Essendo $z = x^2 + y^2$, in modo esplicito le

equazioni di moto diventano

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda(x, y, z)x \\ m\ddot{y} = 2\lambda(x, y, z)y \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda(x, y, z) \end{cases} \quad (4.3.27)$$

Inoltre

$$\dot{z} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y}.$$

Dalla terza equazione è possibile ricavare λ , infatti

$$\lambda(x, y, x) = -mg - 2m(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}).$$

In definitiva le equazioni di moto forniscono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m[g + 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})]x \\ m\ddot{y} = -2m[g + 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y})]y \\ \lambda(x, y, x) = -mg - 2m(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}) \end{cases} \quad (4.3.28)$$

di cui le prime due rappresentano le equazioni pure di moto.

Le configurazioni di equilibrio si ottengono imponendo $P = P_0 = \text{cost.}$; da cui

$$\begin{cases} 0 = -2mgx \\ 0 = -2mgy \end{cases}$$

ovvero $P_0 = (0, 0, 0)$. La reazione vincolare nella configurazione di equilibrio è data da

$$\Phi = \lambda(P_0)\nabla f(P_0) = -mg(0, 0, -1) = (0, 0, mg). \quad (4.3.29)$$

AGGIUNGERE IL CASO DI SUPERFICIE ROTANTE

4.4 Cinematica delle masse

Oltre alle informazioni geometriche sul sistema che si considera, occorre anche tenere conto delle caratteristiche cinematiche introducendo alcune definizioni e proprietà. Le definizioni saranno date parallelamente per un sistema di punti materiali del tipo $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ e per un generico corpo continuo \mathcal{B} ; le proprietà valgono in entrambi i casi ma saranno dimostrate solo nel caso discreto.

Definizione 4.4.1. Si definisce quantità di moto il vettore libero

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (\text{caso discreto}) \quad (4.4.1)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{B} \quad (\text{caso continuo}) \quad (4.4.2)$$

Proposizione 4.4.1. *Vale la formula*

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_G, \quad (4.4.3)$$

essendo $M = \sum_{i=1}^N m_i$ e \mathbf{v}_G la velocità del baricentro.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso discreto. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$ e dalla definizione di baricentro si ha

$$M(G - O) = M \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O),$$

da cui derivando rispetto al tempo si ha

$$M(\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_O) = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O \sum_{i=1}^N m_i,$$

e infine

$$M \mathbf{v}_G - M \mathbf{v}_O = \mathbf{Q} - M \mathbf{v}_O,$$

da cui semplificando si ha la tesi. \square

Definizione 4.4.2. Dato un polo $O \in \mathcal{E}$, si definisce momento angolare o momento della quantità di moto il vettore

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i \quad (\text{caso discreto}) \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{K}_O = \int_{\mathcal{B}} \rho (P - O) \wedge \mathbf{v} d\mathcal{B} \quad (\text{caso continuo}) \quad (4.4.5)$$

Proposizione 4.4.2. *Dati due poli $O, O' \in \mathcal{E}$, vale la formula*

$$\mathbf{K}_{O'} = \mathbf{K}_O + (O - O') \wedge \mathbf{Q}. \quad (4.4.6)$$

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso discreto.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{O'} &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O') \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O + O - O') \wedge \mathbf{v}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \\
 &= \mathbf{K}_O + (O - O') \wedge \mathbf{Q}.
 \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.4.1. Se $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ il momento non dipende dal polo.

Definizione 4.4.3. Dicesi moto relativo al baricentro (o intorno al baricentro) il moto visto da un osservatore avente origine nel baricentro e gli assi di direzioni invariabili rispetto ad un osservatore fisso.

Detto $\Omega\xi\eta\zeta$ il riferimento fisso e $Gx'y'z'$ quello del moto intorno al baricentro, $Gx'y'z'$ si muove rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$ di moto puramente traslatorio, ovvero $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{0}$, essendo $\boldsymbol{\omega}'$ la velocità angolare di $Gx'y'z'$ rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$.

Per ogni punto materiale P_i si ha

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_i^T,$$

essendo \mathbf{v}_i la velocità di P_i rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$, \mathbf{v}'_i la velocità di P_i rispetto a $Gx'y'z'$ e \mathbf{v}_i^T la velocità di trascinamento di P_i che è data da

$$\mathbf{v}_i^T = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}' \wedge (P_i - G) = \mathbf{v}_G,$$

perchè $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{0}$. Di conseguenza per ogni punto materiale P_i si ha

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_G.$$

Per l'osservatore posto in $Gx'y'z'$ la quantità di moto è nulla. Infatti, essendo $\mathbf{v}'_G = \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{Q}' = M\mathbf{v}'_G = \mathbf{0}.$$

Inoltre il momento della quantità di moto non dipende dal polo. Infatti dalla (4.4.6) ed essendo $\mathbf{Q}' = \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{K}'_{O'} = \mathbf{K}'_O$$

per ogni scelta dei poli $O, O' \in \mathcal{E}$. È possibile, quindi, omettere il polo e indicare tale quantità semplicemente con \mathbf{K}' .

Proposizione 4.4.3. *Dato un polo $O \in \mathcal{E}$, il momento angolare nel sistema di riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$ e quello nel sistema di riferimento $Gx'y'z'$ sono legati dalla relazione*

$$\mathbf{K}_O = (G - O) \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{K}'. \quad (4.4.7)$$

Corollario 4.4.4. $\mathbf{K}_G = \mathbf{K}'$.

Definizione 4.4.4. Si definisce energia cinetica la quantità scalare

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (\text{caso discreto}) \quad (4.4.8)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v}^2 d\mathcal{B} \quad (\text{caso continuo}) \quad (4.4.9)$$

Proposizione 4.4.5 (Teorema di König). *Dati due sistemi di riferimento $\Omega\xi\eta\zeta$ e $Gx'y'z'$ come nella Definizione 4.4.3, vale la seguente relazione*

$$T = T' + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2, \quad (4.4.10)$$

essendo T l'energia cinetica per l'osservatore fisso, T' quella del moto intorno al baricentro e \mathbf{v}_G la velocità del baricentro rispetto all'osservatore fisso.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso discreto.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i{}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i 2\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_G^2 \\ &= T' + \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \right) \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} \mathbf{v}_G^2 \sum_{i=1}^N m_i \\ &= T' + \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2, \end{aligned}$$

da cui tenendo conto che $\mathbf{Q}' = \mathbf{0}$ si ha la tesi. □

4.4.1 Momento angolare di un sistema rigido

Supponiamo adesso che il sistema materiale sia rigido di vettori caratteristici \mathbf{v}_O e $\boldsymbol{\omega}$. Considerato un sistema di riferimento Ωxyz , di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, il momento angolare è

dato da

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] = M(G - O) \wedge \mathbf{v}_O + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)].$$

Se $O = G$ oppure O polo fisso, il momento angolare si riduce a

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)].$$

Si verifica facilmente che $\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]$ è una funzione lineare di $\boldsymbol{\omega}$ e pertanto definisce un endomorfismo di \mathbb{R}^3 . Determiniamo la sua matrice rispetto alla base fissata. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\mapsto I_{11}\mathbf{e}_1 + I_{12}\mathbf{e}_2 + I_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto I_{12}\mathbf{e}_1 + I_{22}\mathbf{e}_2 + I_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3 &\mapsto I_{13}\mathbf{e}_1 + I_{23}\mathbf{e}_2 + I_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Pertanto la matrice associata è proprio la matrice d'inerzia rispetto al polo O relativamente alla base considerata. Indicate con ω_i le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, si ha

$$[\mathbf{K}_O] = [\sigma_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4.11)$$

4.4.2 Energia cinetica di un sistema rigido

Considerato il sistema di riferimento Ωxyz , di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ come nella sottosessione sopra, l'energia cinetica si può scrivere come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_O^2 + M \boldsymbol{\omega} \wedge (G - O) \cdot \mathbf{v}_O + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2.$$

Se O è fisso

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2.$$

Dunque se

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i, \quad P_i - O = x_i \mathbf{e}_1 + y_i \mathbf{e}_2 + z_i \mathbf{e}_3,$$

si ha

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_2 z_i - \omega_3 y_i) \mathbf{e}_1 + (\omega_3 x_i - \omega_1 z_i) \mathbf{e}_2 + (\omega_1 y_i - \omega_2 x_i) \mathbf{e}_3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)]^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\omega_2 z_i - \omega_3 y_i)^2 + (\omega_3 x_i - \omega_1 z_i)^2 + (\omega_1 y_i - \omega_2 x_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \omega_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \omega_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega_3^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \omega_1 \omega_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \omega_1 \omega_3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \omega_2 \omega_3 \\ &= \frac{1}{2} [I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2 + 2I_{12} \omega_1 \omega_2 + 2I_{13} \omega_1 \omega_3 + 2I_{23} \omega_2 \omega_3] \\ &= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [\sigma_O] [\boldsymbol{\omega}]. \end{aligned}$$

Stessa relazione vale nel caso continuo.

Esempio 4.4.1. Energia cinetica in un moto rigido puramente rotatorio.

Supponiamo di avere un moto rigido attorno all'asse r di versore \mathbf{e} . La velocità angolare è data da $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ e quindi, fissato $O \in r$,

$$T = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [\sigma_O] [\boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{2} \omega^2 [\mathbf{e}]^T [\sigma_O] [\mathbf{e}] = \frac{1}{2} I_r \omega^2, \quad (4.4.12)$$

con I_r momento assiale rispetto alla retta r .

4.5 Le equazioni cardinali

Sia dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ in generale potendo essere soggetto a vincoli. Le equazioni della dinamica per tale sistema sono date da

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \boldsymbol{\Phi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5.1)$$

dove \mathbf{F}_i è il risultante delle forze attive agenti su P_i e $\boldsymbol{\Phi}_i$ è il risultante delle reazioni vincolari agenti su P_i . Nel caso in cui in sistema di riferimento sia non inerziale tra le forze attive andranno contemplate anche le forze apparenti. A sua volta si ha che

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(i)} + \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (4.5.2)$$

con $\mathbf{F}_i^{(i)}$ risultante delle forze attive interne agenti su P_i , cioè dovute alle interazioni con gli altri punti di Σ , e $\mathbf{F}_i^{(e)}$ risultante delle forze attive esterne agenti su P_i , cioè dovute alle interazioni con il resto dell'universo. Analogamente si ha anche

$$\Phi_i = \Phi_i^{(i)} + \Phi_i^{(e)} \quad (4.5.3)$$

dove $\Phi_i^{(i)}$ è il risultante delle reazioni vincolari interne agenti su P_i e $\Phi_i^{(e)}$ è il risultante delle reazioni vincolari esterne agenti su P_i . Sommando membro a membro la (4.5.1) per $i = 1, 2, \dots, N$ e tenendo conto della (4.5.2) e della (4.5.3) si ottiene

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(i)} + \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(e)}. \quad (4.5.4)$$

Osservando che le forze interne costituiscono un sistema equilibrato segue che

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(i)} = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Pertanto la (4.5.4) si riduce a

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (4.5.5)$$

dove

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(a,e)} + \mathbf{R}^{(v,e)},$$

avendo posto

$$\mathbf{R}^{(a,e)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad \mathbf{R}^{(v,e)} = \sum_{i=1}^N \Phi_i^{(e)}.$$

La (4.5.5) prende il nome di prima equazione cardinale della dinamica nella prima forma.

Sia $O \in \mathcal{E}$ e si moltiplichino vettorialmente a sinistra ciascuna delle (4.5.1) per $(P_i - O)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$ ottenendo così

$$m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i = (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i + (P_i - O) \wedge \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5.6)$$

da cui sommando per $i = 1, 2, \dots, N$ e per le stesse considerazioni di prima si ha

$$\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \Phi_i^{(e)},$$

e quindi infine

$$\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i = \mathbf{M}_O^{(e)}, \quad (4.5.7)$$

dove

$$\mathbf{M}_O^{(e)} = \mathbf{M}_O^{(a,e)} + \mathbf{M}_O^{(v,e)},$$

avendo posto

$$\mathbf{M}_O^{(a,e)} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}, \quad \mathbf{M}_O^{(v,e)} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{\Phi}_i^{(e)}.$$

La (4.5.7) prende il nome di seconda equazione cardinale della dinamica nella prima forma.

Proposizione 4.5.1. *Durante il moto di Σ devono valere le equazioni (4.5.5) e (4.5.7).*

Proposizione 4.5.2 (Teorema del moto del baricentro). *La (4.5.5) è equivalente a*

$$\dot{\mathbf{Q}} = M \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (4.5.8)$$

essendo

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i,$$

M la massa totale e di Σ e \mathbf{a}_G l'accelerazione del baricentro G di Σ .

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i.$$

Dunque sostituendo nella (4.5.5) si ha la tesi. Il nome di questa proposizione è dovuto al fatto che indicando con \mathbf{v}_G la velocità e l'accelerazione del baricentro G di Σ , si ha

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_G \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = M \mathbf{a}_G.$$

□

Osservazione 4.5.1. Si osservi che la relazione 4.5.8 non è in generale una equazione indipendente, dipendendo dal moto di tutti i punti del sistema.

Osservazione 4.5.2. Se $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{0}$ allora \mathbf{Q} è costante durante il moto.

Proposizione 4.5.3 (Teorema del momento angolare). *La (4.5.7) è equivalente a*

$$\dot{\mathbf{K}}_O + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_O^{(e)}, \quad (4.5.9)$$

essendo $O \in \mathcal{E}$, \mathbf{v}_O e

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i.$$

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_O &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \wedge \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i \\ &= -\mathbf{v}_O \sum_{i=1}^N m_i \wedge \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i \\ &= -\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Dunque sostituendo nella (4.5.7) si ha la tesi. \square

Osservazione 4.5.3. Se O è fisso oppure se $O \equiv G$ oppure se O si muove parallelamente a G , si ha che $\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Proposizione 4.5.4. *Durante il moto di Σ devono valere le equazioni (4.5.8) e (4.5.9), dette equazioni cardinali della dinamica nella seconda forma.*

Osservazione 4.5.4. Le equazioni cardinali della dinamica sono condizioni necessarie cui deve soddisfare il sistema ma in generale non sono sufficienti a descriverne il moto.

Proposizione 4.5.5. *Se $O \equiv G$ allora (4.5.9) è invariante nel passaggio al moto attorno al baricentro.*

Dimostrazione. Essendo il riferimento del moto intorno al baricentro puramente traslatorio,

$$\frac{d_a}{dt} \mathbf{K}_G = \frac{d_r}{dt} \mathbf{K}_G.$$

Inoltre, per quanto visto sopra, $\mathbf{K}'_G = \mathbf{K}_G$, avendo indicato con \mathbf{K}'_G il momento angolare del moto intorno al baricentro. Risulta pure invariante il momento delle forze rispetto a G ; infatti nel moto intorno al baricentro al momento valutato nel sistema fisso occorre aggiungere il momento relativo alle forze di trascinamento (quelle di Coriois sono nulle)

$$-\sum_{i=1}^N m (P_i - G) \wedge \mathbf{a}_G = \mathbf{0}$$

per la definizione di centro di massa.

Da quanto sopra si ha la richiesta invarianza della seconda equazione cardinale. \square

Proposizione 4.5.6 (Conservazione della quantità di moto). *Se esiste un versore fisso \mathbf{e} tale che $\mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{e} = 0$ allora $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}$ è costante durante il moto.*

Dimostrazione. Dalla (4.5.8), moltiplicando scalarmente ambo i membri per \mathbf{e} si ha

$$\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{e} = 0$$

pertanto, essendo \mathbf{e} fisso, segue che

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}) = 0,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 4.5.7 (Conservazione del momento angolare). *Se esiste un versore fisso \mathbf{e} tale che $\mathbf{M}_G^{(e)} \cdot \mathbf{e} = 0$ allora $\mathbf{K}_G \cdot \mathbf{e}$ è costante durante il moto.*

Dimostrazione. Analoga alla precedente. □

Osservazione 4.5.5. Se $\mathbf{M}_G^{(e)} = \mathbf{0}$ allora \mathbf{K}_G è costante durante il moto.

Se invece di considerare un sistema discreto di punti materiali si prende in esame un rigido continuo, le considerazioni precedenti non possono essere effettuate. In analogia con il caso discreto si postula quanto segue.

Assioma 9. *Durante il moto di un rigido continuo \mathcal{B} valgono le relazioni*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} d\mathcal{B} = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (4.5.10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v} d\mathcal{B} + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_O^{(e)} \quad (4.5.11)$$

dette rispettivamente prima e seconda equazione cardinale della dinamica per i rigidi continui.

È possibile provare che le proprietà delle equazioni cardinali provate nel caso discreto restano valide in quello continuo.

4.6 Dinamica dei sistemi vincolati

Sia dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ soggetto ad una sollecitazione attiva

$$\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$$

e ad una sollecitazione vincolare

$$\Sigma_{\Phi} = \{(\Phi_i, \mathbf{F}_i : i = 1, 2, \dots, N)\}.$$

Definizione 4.6.1. Si definisce potenza delle forze attive all'istante t la quantità

$$W_F(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(t) \cdot \mathbf{v}_i(t), \quad (4.6.1)$$

essendo \mathbf{v}_i la velocità di P_i per $i = 1, 2, \dots, N$. Similmente si definisce potenza delle reazioni vincolari all'istante t la quantità

$$W_{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(t) \cdot \mathbf{v}_i(t). \quad (4.6.2)$$

Teorema 4.6.1 (delle forze vive). *Sia dato un sistema vincolato di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$. Durante il moto*

$$\frac{dT}{dt} = W_F + W_{\Phi}. \quad (4.6.3)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(v_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

Inoltre dalla (4.5.1), moltiplicando ambo i membri scalarmente per \mathbf{v}_i , segue che

$$m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \Phi_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Combinando tali espressioni si ottiene infine

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \Phi_i \cdot \mathbf{v}_i) = W_F + W_{\Phi}.$$

□

Esempio 4.6.1. Sia P un punto materiale vincolato ad una superficie \mathcal{S} fissa e liscia. Allora le velocità sono parallele al piano tangente nel punto della superficie in cui si trova il punto materiale, mentre la reazione vincolare Φ è ortogonale a tale piano. Pertanto si ha

$$W_{\Phi} = \Phi \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Se invece la superficie è mobile con velocità normale \mathbf{v}_N si ha che

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_N$$

e quindi

$$W_{\Phi} = \Phi \cdot \mathbf{v}_{//} + \Phi \cdot \mathbf{v}_N = \Phi \cdot \mathbf{v}_N,$$

che in generale è non nulla.

Definizione 4.6.2. Sia P un punto materiale vincolato. Si dice velocità virtuale di P all'istante t e si indica $\hat{\mathbf{v}}(t)$ una qualunque velocità consentita dai vincoli "congelati" all'istante t .

In altre parole nella velocità virtuale non si tiene conto dell'effetto di trascinamento del vincolo. Nel caso dei vincoli mobili le velocità possibili e quelle virtuali coincidono e, precipuamente, la velocità effettiva risulta essere una particolare velocità virtuale.

Esempio 4.6.2. Sia P un punto materiale vincolato ad una superficie liscia mobile S_t di equazione $f(x, y, z, t) = 0$. Siano q_1 e q_2 i parametri lagrangiani che permettono di rappresentare S_t . L'insieme delle velocità virtuali ad un dato istante t è costituito da tutti i vettori del piano tangente a S_t in $P(t)$. Inoltre, poichè una base del piano tangente è data da

$$\frac{\partial P}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial q_2},$$

allora la generica velocità virtuale all'istante t si esprime come

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \alpha \frac{\partial P}{\partial q_1}(t) + \beta \frac{\partial P}{\partial q_2}(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esempio 4.6.3. Sia P un punto materiale vincolato ad una curva liscia mobile Γ_t . Se $\mathbf{t}(t)$ è il vettore tangente a Γ_t in $P(t)$ allora la generica velocità virtuale all'istante t si esprime come

$$\hat{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{t}(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 4.6.1. Si noti che la velocità effettiva si può decomporre nella somma di una componente virtuale e una di trascinamento.

Definizione 4.6.3. Dato un sistema di punti materiali $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ soggetto ad una sollecitazione attiva

$$\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}_i) : i = 1, 2, \dots, N\} \tag{4.6.4}$$

e ad una sollecitazione vincolare

$$\Sigma_{\Phi} = \{(P_i, \Phi_i) : i = 1, 2, \dots, N\}. \tag{4.6.5}$$

Durante il moto si definiscono le quantità

$$\hat{W}_F = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i, \quad (4.6.6)$$

$$\hat{W}_\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i, \quad (4.6.7)$$

dette rispettivamente potenza virtuale delle forze attive e potenza virtuale delle reazioni vincolari, dove $(\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \dots, \hat{\mathbf{v}}_N)$ è un qualunque atto di moto virtuale consentito dai vincoli nell'istante considerato nella configurazione del sistema in tale istante. Si osservi che non si ha un solo valore ma, fissato il sistema di forze ad un dato istante, la potenza virtuale varia con le scelta dell'atto di moto virtuale consentito dai vincoli all'istante considerato.

Osservazione 4.6.2. Per i vincoli fissi la velocità effettiva è una particolare velocità virtuale, quindi se $\hat{W}_\Phi = 0$ per ogni atto di moto virtuale allora anche $W_\Phi = 0$.

Esempio 4.6.4. Sia P un punto materiale vincolato a stare in un medesimo semispazio rispetto ad un piano liscio fisso o mobile π . Si consideri in primo luogo il caso in cui π è fisso. Allora Se $P \notin \pi$ si ha che $\Phi = \mathbf{0}$ e dunque $\hat{W}_\Phi = 0$. Se invece $P \in \pi$ allora si ha una reazione vincolare Φ non nulla e ortogonale a π e la velocità virtuale $\hat{\mathbf{v}}$ deve essere tale per cui il punto P rimane nello stesso semispazio, cioè $\hat{\mathbf{v}}$ deve formare un angolo acuto con Φ . Pertanto si ha

$$\hat{W}_\Phi = \Phi \cdot \hat{\mathbf{v}} \geq 0.$$

Se il piano π si muove con velocità \mathbf{v}_π la potenza virtuale della reazione vincolare \hat{W}_Φ rimane la stessa, mentre se si calcola la potenza effettiva in corrispondenza della velocità $\hat{\mathbf{v}}$ si ha

$$W_\Phi = \Phi \cdot (\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_\pi),$$

che in generale non risulta definita in segno.

Generalizzando quanto visto per il punto materiale, si possono caratterizzare i vincoli ideali nel caso generale in termini di potenza.

Definizione 4.6.4. Si dice che un vincolo è ideale se per ogni sistema materiale su cui esso agisce si ha

$$\hat{W}_\Phi \geq 0,$$

per ogni atto di moto virtuale consentito dai vincoli, per ogni configurazione all'istante t e per ogni $t > 0$.

Proposizione 4.6.2. *Se ogni velocità virtuale ammette l'opposta allora condizione necessaria e sufficiente affinché il vincolo sia ideale è che $\hat{W}_\Phi = 0$, per ogni atto di moto virtuale consentito dai vincoli, per ogni configurazione all'istante t e per ogni $t > 0$.*

Corollario 4.6.3. *Se il vincolo è ideale e bilatero allora $\hat{W}_\Phi = 0$, per ogni atto di moto virtuale consentito dai vincoli, per ogni configurazione all'istante t e per ogni $t > 0$.*

Osservazione 4.6.3. I vincoli lisci sono ovviamente ideali.

Esempio 4.6.5. I vincoli di rigidità sono ideali. Si consideri il sistema $\Sigma = \{(P_1, m) (P_2, m)\}$ dove i punti P_1 e P_2 sono sottoposti al vincolo di rigidità $d(P_1, P_2) = \text{cost}$. Indicando con Φ_{12} e Φ_{21} le due reazioni vincolari si ha che $\Phi_{12} = -\Phi_{21}$. Ne segue che

$$\hat{W}_\Phi = \Phi_{12} \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 + \Phi_{21} \cdot \hat{\mathbf{v}}_2 = \Phi_{12} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{\mathbf{v}}_2).$$

Inoltre, poichè il moto è rigido, si ha che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_2 - P_1),$$

da cui segue

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{v}}_2 + \hat{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_2 - P_1),$$

ove $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ denota la velocità angolare virtuale all'istante considerato. Si ha

$$\hat{W}_\Phi = \Phi_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_2 - P_1) = 0$$

in quanto $\Phi_{12} \parallel (P_2 - P_1)$.

Proposizione 4.6.4. *Dato il sistema di forze*

$$\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}_i) : i = 1, 2, \dots, N\} \quad (4.6.8)$$

agenti sui punti di un corpo continuo rigido \mathcal{B} , se \mathbf{v}_O e $\boldsymbol{\omega}$ sono i vettori caratteristici del moto di \mathcal{B} allora si ha che

$$W_F = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O, \quad (4.6.9)$$

essendo

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i.$$

Dimostrazione. Sapendo che

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)$$

si ha

$$\begin{aligned}
 W_F &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \right) \cdot \mathbf{v}_O + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O) \\
 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i \\
 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O.
 \end{aligned}$$

□

Esempio 4.6.6. Cerniera sferica ideale.

Esempio 4.6.7. Cerniera cilindrica ideale.

Esempio 4.6.8. Cerniera piana ideale.

Esempio 4.6.9. Carrello ideale con e senza cerniera.

Esempio 4.6.10. Incastro.

4.7 Equazioni cardinali della statica

Sia \mathcal{B} un corpo rigido a l g.d.l. e siano q_1, q_2, \dots, q_l una scelta (locale) di parametri lagrangiani. Sia inoltre \mathcal{B}_t la configurazione di \mathcal{B} all'istante t . Ad ogni istante la configurazione \mathcal{B}_t è in corrispondenza con il vettore

$$C_t = \mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t))$$

che individua la configurazione nella rappresentazione lagrangiana.

Nel seguito, ove non vi sia adito ad equivoci, non differenzieremo tra la configurazione \mathcal{B}_t nello spazio fisico e la sua rappresentazione lagrangiana C_t .

Esempio 4.7.1 (Corpo rigido libero). Una scelta possibile (locale) di parametri lagrangiani è data dalle coordinate del baricentro e gli angoli di Eulero:

$$q_1 = x_G, \quad q_2 = y_G, \quad q_3 = z_G, \quad q_4 = \psi, \quad q_5 = \theta, \quad q_6 = \varphi$$

che variano in

$$\mathbb{R}^3 \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[.$$

In forma più astratta l'insieme delle configurazioni di un rigido libero è data da

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

Definizione 4.7.1. Sia \mathcal{B} un corpo rigido avente l g.d.l. Una configurazione (nella rappresentazione lagrangiana) $C^{(0)}$ consentita dai vincoli $\forall t > 0$ si dice che è una configurazione di equilibrio per \mathcal{B} se dal fatto che $C_0 = C^{(0)}$ con atto di moto iniziale nullo segue che $C_t = C^{(0)}$ per ogni $t > 0$.

Proposizione 4.7.1 (Equazioni cardinali della statica). *Sia $C^{(0)}$ una configurazione di equilibrio per \mathcal{B} . Allora necessariamente*

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e)}(C^{(0)}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} & \forall t > 0 \\ \mathbf{M}_O^{(e)}(C^{(0)}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} & \forall O \in \mathcal{E}, O \text{ polo}, \forall t > 0, \end{cases}$$

avendo indicato con $\mathbf{0}$ l'atto di moto nullo

Osservazione 4.7.1. Le equazioni cardinali della statica, come nel caso dinamico, sono solo condizioni necessarie. Tuttavia in molti casi si rivelano anche sufficienti. Ad esempio in presenza di vincoli ideali e in assenza di vincoli inefficaci consentono di determinare le configurazioni di equilibrio e, se non ci sono instabilità geometriche come quelle nel caso di cerniere allineate, univocamente le reazioni vincolari. Se i vincoli sono ideali ma ci si trova in presenza di vincoli inefficaci, si ottengono le configurazioni di equilibrio ma le reazioni vincolari restano indeterminate.

Esempio 4.7.2. Statica del rigido con asse fisso e liscio.

4.8 Sistemi articolati

Un sistema articolato è un insieme di parti rigide vincolate tra loro ed eventualmente anche con l'esterno. Le varie parti rigide sono collegate tra loro tramite nodi interni. Parleremo di nodi scarichi se non agiscono su di essi forze attive altrimenti parleremo di nodi carichi.

Il metodo per studiare un sistema articolato consiste nella sua disgregazione, ovvero la decomposizione nelle parti rigide, a cui si aggiungono i nodi interni.

Lo studio si effettua considerando le seguenti equazioni:

1. un numero di sistemi indipendenti di equazioni cardinali pari al numero di parti rigide;

2. le equazioni di bilancio ai nodi interni.

La scelta in generale non è unica. Ad esempio se si hanno due parti rigide collegate da un nodo interno, si hanno le seguenti possibilità:

- le equazioni cardinali dell'intero sistema e di una sottoparte e l'equazione di bilancio al nodo;
- oppure le equazioni cardinali di ciascuna sottoparte e l'equazione di bilancio al nodo.

Esempio 4.8.1. Due aste vincolate tra di loro agli estremi.

4.9 Campi conservativi

Si consideri un sistema di forze Σ_F agente su di un sistema materiale,

$$\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}_i) : i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Definizione 4.9.1. Dicesi lavoro di Σ_F nell'intervallo $[t_1, t_2]$ con $0 < t_1 < t_2$ la quantità

$$L_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} W_F(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt \quad (4.9.1)$$

Osservazione 4.9.1. In generale $L_{[t_1, t_2]}$ dipende dal moto.

Osservazione 4.9.2. Introducendo lo spostamento elementare $dP_i = \mathbf{v}_i dt$ e indicando con $\gamma[C_{t_1}, C_{t_2}]$ il moto dalla configurazione iniziale C_{t_1} alla configurazione finale C_{t_2} , la (4.9.1) si può riscrivere come

$$L_{[t_1, t_2]} = \int_{\gamma[C_{t_1}, C_{t_2}]} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot dP_i$$

Definizione 4.9.2. Il sistema di forze Σ_F si dice conservativo se esiste $U = U(P_1, P_2, \dots, P_N)$ tale che

$$\mathbf{F}_i = \nabla_{P_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \mathbf{k}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.9.2)$$

Osservazione 4.9.3. Se una forza è conservativa allora è posizionale.

Osservazione 4.9.4. Si consideri il caso particolare in cui $\Sigma_F = \{(P, \mathbf{F})\}$. Allora \mathbf{F} è conservativa se esiste $U = U(P)$ tale che

$$\mathbf{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Teorema 4.9.1. *Data una funzione $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto connesso, se $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ in Ω allora \mathbf{F} è conservativa, ove*

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Osservazione 4.9.5. Richiedere che $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ equivale a richiedere che

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

Osservazione 4.9.6. Nel caso di un sistema di forze Σ_F conservativo, si ha

$$\begin{aligned} L_{[t_1, t_2]} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \nabla_{P_i} U \cdot \mathbf{v}_i dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} U(P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)) dt \\ &= U(P_1(t_2), P_2(t_2), \dots, P_N(t_2)) - U(P_1(t_1), P_2(t_1), \dots, P_N(t_1)) \\ &= U(C_{t_2}) - U(C_{t_1}) \end{aligned}$$

In particolare si ha che

$$W_F = \frac{dU}{dt}. \quad (4.9.3)$$

Esempio 4.9.1. Si consideri il caso in cui $\Sigma_F = \{(P, \mathbf{F})\}$ con \mathbf{F} vettore costante. Per trovare il potenziale U calcoliamo prima la potenza W_F ,

$$W_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}(P - O) = \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot (P - O)). \quad (4.9.4)$$

Allora si ha

$$U = \mathbf{F} \cdot (P - O)$$

e Σ_F risulta quindi conservativo. Un esempio importante è dato da un corpo soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Questa è applicata sul baricentro G e pertanto $U = m\mathbf{g} \cdot (G - O)$.

Esempio 4.9.2. Sia P un punto materiale collegato ad una molla avente l'altro estremo O fisso. Si ha

$$\mathbf{F} = -k(P - O).$$

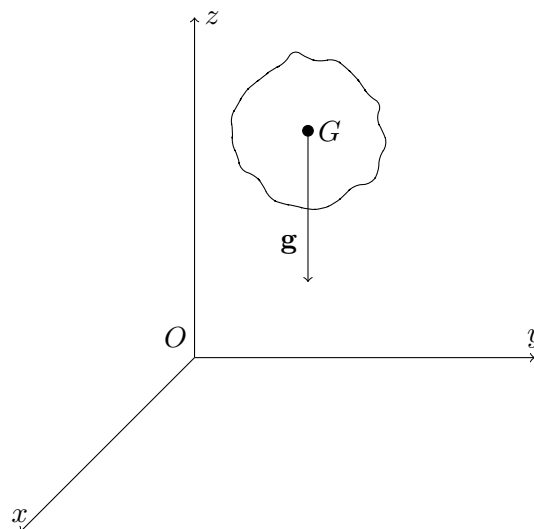


FIGURA 4.8: Corpo soggetto alla forza peso.

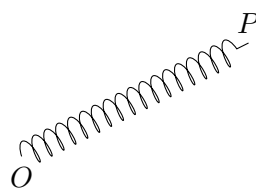


FIGURA 4.9: Molla ideale.

La potenza W_F è data da

$$W_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -k(P - O) \cdot \frac{d}{dt}(P - O) = -\frac{k}{2} \frac{d}{dt} |P - O|^2.$$

Pertanto si ottiene

$$U = -\frac{k}{2} |P - O|^2.$$

Esempio 4.9.3. Si consideri una molla ai cui estremi sono collegati due punti materiali P_1 e P_2 . Si ha

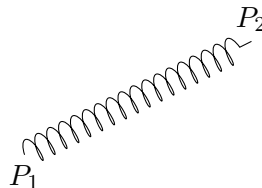


FIGURA 4.10: Molla ideale.

$$\Sigma_F = \{(P_1, -k(P_1 - P_2)), (P_2, -k(P_2 - P_1))\}.$$

La potenza W_F è data da

$$\begin{aligned} W_F &= -k(P_1 - P_2) \cdot \mathbf{v}_1 - k(P_2 - P_1) \cdot \mathbf{v}_2 = -k(P_1 - P_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= -k(P_1 - P_2) \cdot \frac{d}{dt}(P_1 - P_2) = -\frac{k}{2} \frac{d}{dt} |P_1 - P_2|^2. \end{aligned}$$

Pertanto si ottiene

$$U = -\frac{k}{2} |P_1 - P_2|^2.$$

Esempio 4.9.4. Potenziale di una coppia di momento costante.

4.10 Equazioni di moto di Lagrange e integrali primi

Sia $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ un sistema olonomo a l g.d.l. Durante il moto devono valere le seguenti equazioni

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{\Phi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.10.1)$$

ove \mathbf{F}_i è il risultante delle forze agenti su P_i e $\mathbf{\Phi}_i$ è il risultante delle reazioni vincolari su P_i . Moltiplicando scalarmente ambo i membri per la velocità virtuale $\hat{\mathbf{v}}_i$ relativa a P_i e sommando su i si ha

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i. \quad (4.10.2)$$

Definizione 4.10.1. Si chiama forza d'inerzia agente su P_i il vettore applicato

$$(P_i, -m_i \mathbf{a}_i).$$

Definizione 4.10.2. Si definisce potenza virtuale delle forze d'inerzia la quantità scalare

$$\hat{W}_m = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \hat{\mathbf{v}}_i \quad (4.10.3)$$

Proposizione 4.10.1. Sia $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ un sistema olonomo a l g.d.l. Per ogni atto di moto consentito dai vincoli, all'istante considerato e nella configurazione in tale istante vale la relazione

$$\hat{W}_m + \hat{W}_F + \hat{W}_\Phi = 0. \quad (4.10.4)$$

Proposizione 4.10.2. Sia $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ un sistema olonomo a l g.d.l. soggetto a vincoli ideali e bilateri. Per ogni atto di moto consentito dai vincoli,

all'istante considerato e nella configurazione in tale istante vale la relazione

$$\hat{W}_m + \hat{W}_F = 0, \quad (4.10.5)$$

detta equazione simbolica della dinamica.

Proposizione 4.10.3. Sia $\Sigma = \{(P_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ la sollecitazione attiva agente su di un sistema olonomo \mathcal{B} a l g.d.l., soggetto a vincoli ideali e bilateri. Se q_1, q_2, \dots, q_l è una scelta locale di parametri lagrangiani, durante il moto di \mathcal{B} valgono le equazioni di moto di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, l \quad (4.10.6)$$

ove le quantità

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_\alpha} \quad (4.10.7)$$

prendono il nome di componenti lagrangiane della sollecitazione attiva e T è l'energia cinetica del sistema.

Osservazione 4.10.1. $Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

Osservazione 4.10.2. Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.

Proposizione 4.10.4 (Condizioni lagrangiane di equilibrio). Sia $\Sigma = \{(P_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ la sollecitazione attiva agente su di un sistema olonomo \mathcal{B} a l g.d.l., soggetto a vincoli ideali e bilateri, e sia q_1, q_2, \dots, q_l una scelta locale di parametri lagrangiani. Una configurazione $C^{(0)}$ di parametri lagrangiani $\mathbf{q}^{(0)}$ è una configurazione di equilibrio se e solo se

1. $Q_\alpha(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{0}, t) = 0$ per ogni $\alpha = 1, 2, \dots, l$;
2. la configurazione $C^{(0)}$ è compatibile con i vincoli per ogni $t > 0$.

Esempio 4.10.1. Punto vincolato ad una guida rettilinea ruotante.

Definizione 4.10.3. Il campo delle componenti lagrangiane della sollecitazione attiva (Q_1, Q_2, \dots, Q_l) si dice conservativo se esiste una funzione $U = U(\mathbf{q})$ tale che

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (4.10.8)$$

Osservazione 4.10.3. Se $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_l)$ è conservativo allora $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})$.

Osservazione 4.10.4. Se $\Sigma_F = \{(P_i, \mathbf{F}) : i = 1, 2, \dots, N\}$ è un sistema di forze conservativo di potenziale $U = U(P_1, P_2, \dots, P_N)$ allora si ha che

$$Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}(P_1(\mathbf{q}), P_2(\mathbf{q}), \dots, P_N(\mathbf{q})).$$

Esempio 4.10.2. Potenziale della sollecitazione centrifuga.

Proposizione 4.10.5. (*Principio di stazionarietà della funzione potenziale*). Sia \mathcal{B} un sistema olonomo avente l g.d.l., soggetto a vincoli ideali e bilateri e ad una sollecitazione attiva conservativa. Sia q_1, q_2, \dots, q_l una scelta locale di parametri lagrangiani e sia $U(\mathbf{q})$ l'espressione locale del potenziale. Una configurazione $C^{(0)}$ di parametri lagrangiani $\mathbf{q}^{(0)}$, compatibile con i vincoli per ogni $t > 0$, è una configurazione di equilibrio se e solo se

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}(\mathbf{q}^{(0)}) = 0 \quad \text{per ogni } \alpha = 1, 2, \dots, l.$$

Definizione 4.10.4. Sia $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ un sistema olonomo a l g.d.l. soggetto a vincoli ideali, bilateri e soggetto ad una sollecitazione attiva conservativa. Si chiama lagrangiana la funzione

$$\mathcal{L} = T + U.$$

Proposizione 4.10.6. Sia $\Sigma = \{(P_i, m_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ un sistema olonomo a l g.d.l. soggetto a vincoli ideali, bilateri e soggetto ad una sollecitazione attiva conservativa. Allora le equazioni di lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (4.10.9)$$

Dimostrazione.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

in quanto $U = U(\mathbf{q})$ non dipende da $\dot{\mathbf{q}}$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha, \quad (4.10.10)$$

poichè $Q_\alpha = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$. □

Definizione 4.10.5. Una funzione $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ si dice integrale primo di moto se $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \text{cost.}$ lungo le soluzioni dell'equazione di moto.

Osservazione 4.10.5. La costante dipende dal singolo moto ed è uguale a $f(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0), 0)$.

Osservazione 4.10.6. Qualora accada la conservazione lungo una direzione o totale della quantità di moto o del momento angolare rappresenta un integrale primo.

Osservazione 4.10.7. Se esiste $\bar{\alpha}$ tale che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{\alpha}}} = 0$ allora si ha che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{\alpha}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{\alpha}}} = \text{cost.}$$

lungo le soluzioni della (4.10.9). Tale integrale primo è detto *integrale primo della variabile ciclica o ignorata*.

Proposizione 4.10.7. (*Integrale primo dell'energia meccanica totale*) Sia Σ_F un sistema olonomo soggetto a vincoli fissi, ideali, bilateri e sottoposto ad una sollecitazione attiva conservativa. Allora durante il moto si ha

$$T + V = E = \text{cost.} \quad (4.10.11)$$

ove E è detta *energia meccanica totale* e $V = -U$ è detta *energia potenziale*.

Dimostrazione. Applicando il Teorema delle forze vive si ha

$$\dot{T} = W_F + W_{\Phi} = \dot{U} + W_{\Phi}$$

ove si è sostituita la (4.9.3) poichè per ipotesi la sollecitazione attiva è conservativa. Inoltre i vincoli sono fissi dunque le velocità effettive sono particolari velocità virtuali, cioè

$$W_{\Phi} = \hat{W}_{\Phi}$$

ed essendo i vincoli ideali e bilateri si ha che $\hat{W}_{\Phi} = 0$. Pertanto

$$\dot{T} = \dot{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[T - U] = 0 \quad \Rightarrow \quad T - U = \text{cost.}$$

□

Osservazione 4.10.8. Se esiste, un integrale primo sostituisce una delle equazioni di moto.

4.11 Principio dei lavori virtuali

Sia \mathcal{B} un sistema olonomo soggetto a vincoli ideali, allora $\hat{W}_{\Phi} \geq 0$. Nel caso statico $\hat{W}_m = 0$; ne segue che per ogni atto di moto virtuale consentito dai vincoli a partire dalla configurazione $C^{(0)}$ per ogni $t > 0$

$$\hat{W}_F(C^{(0)}, \mathbf{0}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{0}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}_i \leq 0 \quad (4.11.1)$$

che prende il nome di relazione simbolica della statica.

Definizione 4.11.1. Sia $\delta t > 0$ una quantità arbitraria avente le dimensioni fisiche di un tempo. La quantità $\delta P = \delta t \hat{\mathbf{v}}$, con $\hat{\mathbf{v}}$ velocità virtuale di P , costituisce uno *spostamento virtuale* di P .

Osservazione 4.11.1. Dalla (4.11.1), moltiplicando ambo i membri per δt , segue che

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(C^{(0)}, \mathbf{0}, t) \cdot \delta P_i \leq 0, \quad (4.11.2)$$

per ogni δP_i consentito dai vincoli a partire dalla configurazione $C^{(0)}$ per ogni $t > 0$.

Definizione 4.11.2. La quantità

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(q^{(0)}, \mathbf{0}, t) \cdot \delta P_i \quad (4.11.3)$$

si chiama lavoro virtuale della sollecitazione attiva.

Sintetizzando si ha la seguente proprietà.

Proposizione 4.11.1 (Principio dei lavori virtuali). *Una configurazione $C^{(0)}$ consentita dai vincoli $\forall t > 0$ è di equilibrio se e solo se $\delta L^{(a)} \leq 0$ per ogni spostamento virtuale consentito dai vincoli a partire dalla configurazione $C^{(0)}$ per ogni $t > 0$.*

Proposizione 4.11.2 (Principio di Torricelli). *Sia \mathcal{B} un corpo pesante di massa m appoggiato su di un piano orizzontale, fisso e liscio. $C^{(0)}$ è una configurazione di equilibrio se e solo se non esistono spostamenti virtuali che abbassano la quota del baricentro.*

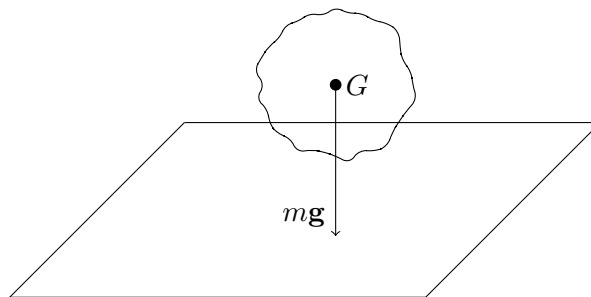


FIGURA 4.11: Corpo di massa m appoggiato su di un piano fisso e liscio.

Dimostrazione. $C^{(0)}$ è una configurazione di equilibrio se e solo se $\delta L^{(a)} = m\mathbf{g} \cdot \delta G \leq 0$ per ogni δG . Ma, essendo $\mathbf{g} = g\mathbf{e}$, ciò accade se e solo se $\delta G \cdot \mathbf{e} \leq 0$, ovvero se e solo se la quota del baricentro non sale in seguito ad uno spostamento virtuale. \square

Osservazione 4.11.2. Nel precedente esempio in generale esistono spostamenti che abbassano la quota di G ma di questi nessuno è uno spostamento virtuale.