3-VARIETÀ DI FANO IN $G(1,4)$

ALBERTO ALZATI (Milano) *

Let V be a Fano threefold of genus one (i.e. with $Pic(V) \simeq Z$). Let G be the Grassmannian of the lines of $\mathbb{P}^4$. We study when it is possible to embed V in G, in such cases we determine the cohomology class of V in $H^*(G)$.

Introduzione.

Sia V una varietà algebrica proiettiva complessa non singolare immersa in una varità W dello stesso tipo. Quando $\dim(V) \geq \mathrm{cod}_W(V)$ esistono dei legami fra le classi di Chern di V e quelle di W (si veda [L-T]) che determinano delle condizioni necessarie all'esistenza di una data V in una data W. È agevole esplicitare questi legami quando W è una varietà di Grassmann $G(d,n)$, (cfr [A]).

Questa tecnica è stata usata per esempio da A. Papantonopoulou e da N. Goldstein (si vedano [P_1], [P_2], [G]), per studiare immersioni di superfici in $G(1,3)$, e da H. Tango (si veda [T]) per classificare gli spazi proiettivi di dimensione massima contenuti in $G(1,n)$.

In questo lavoro si considera il caso in cui W è $G(1,4)$, la Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^4$, e V è una delle 3-varietà di Fano di prima specie classificate da Iskohvskih ([I_1], [I_2], [I-S]). Poichè $\dim(V) = \mathrm{cod}_G(V) = 3$ i legami sopra menzionati si riducono ad un'unica relazione, nel seguito detta relazione fondamentale, che, per ciascuno dei 18 tipi di 3-varietà di Fano elencati in [I-S], permette di decidere se

* Entrato in Redazione l'11 febbraio 1988

è possibile immergere V in $G(1,4)$. Tale possibilità sussiste in 13 casi, per ciascuno dei quali si può determinare la corrispondente espressione di V nell'anello $H^*(G)$, espressione che quasi sempre è unica. Ulteriori considerazioni permettono poi di stabilire, nella maggior parte dei casi, l'esistenza effettiva di una siffatta V in $G(1,4)$.

Notazioni e convenzioni.

Varietà, sottovarietà: con tali termini si intenderanno sempre varietà (sottovarietà) algebriche proiettive non singolari sul campo complesso.

Z anello degli interi

$\mathbb{P}^n$ spazio proiettivo ad n dimensioni sul campo complesso

$\mathrm{cod}_Y(X)$ codimensione nella varietà Y della sua sottovarietà X

$Pic(X)$ gruppo di Picard della varietà X

K_X divisore canonico della varietà X

$G(d,n)$ Grassmanniana dei sottospazi lineari d-dimensionali di $\mathbb{P}^n$

$H^*(X,Z) = H^*(X)$ anello di coomologia a coefficienti interi della varietà X

Ω ciclo di Schubert corrispondente alla sezione iperpiana di $G(d,n)$, immersa mediante l'immersione di Plücker

$c_i(X)$ iesima classe di Chern della varietà X

$\chi(X)$ caratteristica di Eulero-Poincarè di X

$h^{p,q}(X)$ numero di Hodge di X

$\check{\mathbb{P}}^n$ spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}^n$.

La relazione fondamentale.

Sia V una delle 3-varietà di Fano di prima specie classificate da Iskohvskih (si vedano [M] e [C]), in tal caso $Pic(V) = \langle D \rangle$ con D divisore effettivo di V. Si definisce *indice* di V il massimo intero r tale che $-K_V = rH$, H divisore effettivo di V; è noto che $1 \leq r \leq 4$.

Naturalmente sarà: $H = hD, h$ intero positivo; dunque $-K_V = rhD$ con $1 \leq rh \leq r$. Ciò è possibile solo se $h = 1$, quindi $H = D$ e

$Pic(V) = \langle H \rangle$.

Ogni divisore molto ampio A di V è pertanto del tipo $A = aH$, con a intero, $a \geq 1$.

Supponiamo ora che V si immerga in $G(1,4)$, tale immersione dovrà necessariamente realizzarsi attraverso un divisore molto ampio A di V. V risulterà dunque una sottovarietà tridimensionale di $G(1,4)$ e come tale avrà la seguente espressione in $H^*(G)$:

$$V = \alpha\Omega(0,4) + \beta\Omega(1,3) \tag{1,1}$$

α, β interi, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, α e β non entrambi nulli; per tutto ciò che concerne il calcolo di Schubert nelle Grassmanniane faremo riferimento a [K-L].

Indicheremo col simbolo $\cdot$ il prodotto in $H^*(V)$ e con la semplice giustapposizione il prodotto in $H^*(G)$; per quanto riguarda l'esecuzione del prodotto nei due anelli si veda [A].

In [L-T] Lanteri e Turrini hanno dimostrato che se una 3-varietà V è immersa in una 6-varietà G, fra le classi di Chern delle due varietà deve sussistere una relazione che nel nostro caso diventa (cfr [A]):

$$\begin{aligned} c_3(G)V = c_3(V) + c_2(V)\cdot[c_1(G)V - c_1(V)] + \\ + c_1(V)\cdot\{c_2(G)V - c_2(V) - \\ - c_1(V)\cdot[c_1(G)V - c_1(V)]\} + V^2. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Per semplicità conveniamo di non indicare il ciclo $\Omega(0,1)$, corrispondente ai punti di G, ovunque esso appaia.

Indicando con Ω il ciclo di Schubert corrispondente alla sezione iperpiana di $G(1,4)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} c_1(G) &= 5\Omega \\ c_2(G) &= 11\Omega(1,4) + 12\Omega(2,3) \\ c_3(G) &= 15\Omega(0,4) + 30\Omega(1,3). \end{aligned} \tag{1,3}$$

Poichè V è immersa in $G(1,4)$ tramite il suo divisore molto ampio A, in $H^*(G)$ avremo:

$$A = \Omega V. \tag{1,4}$$

Essendo $c_1(V) = -K_V = rH$, da (1,4) segue:

$$ac_1(V) = arH = rA = r\Omega V. \tag{1,5}$$

Inoltre, indicando con d il grado di V, si ha:

$$d = A \cdot A \cdot A = \Omega V \cdot \Omega V \cdot \Omega V = \Omega^3 V = \alpha + 2\beta. \tag{1,6}$$

Tenendo conto che $c_1(V) \cdot c_2(V) = 24$ (cfr [C] pag. 63 e [M]), la (1,5) e la (1,6) ci permettono di calcolare:

$$\begin{aligned}
& rc_2(V) \cdot c_1(G)V = rc_2(V) \cdot 5\Omega V = 5c_2(V) \cdot ac_1(V) = 120a \\
& ac_1(V) \cdot c_2(G)V = r\Omega V \cdot c_2(G)V = r\Omega c_2(G)V = r(11d + \beta) \\
& a^2 c_1(V) \cdot c_1(V) \cdot c_1(G)V = r\Omega V \cdot r\Omega V \cdot 5\Omega V = 5r^2\Omega^3 V = 5r^2 d \\
& a^3 c_1(V) \cdot c_1(V) \cdot c_1(V) = r\Omega V \cdot r\Omega V \cdot r\Omega V = r^3\Omega^3 V = r^3 d.
\end{aligned} \tag{1,7}$$

Le (1,7) ci consentono di eseguire tutti i prodotti che compaiono in (1,2).

Dopo aver moltiplicato ambo i membri di quell'equazione per $a^3 > 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
15a^3 d = {} & a^3\chi(V) + a^3\left(\frac{120a}{r}\right) - 24a^3 + \\
& + a^2 r(11d + \beta) - 24a^3 - 5ar^2 d + r^3 d + a^3(\alpha^2 + \beta^2).
\end{aligned} \tag{1,8}$$

Ossia:

$$15a^3 d = a^3\chi(V) + \frac{120}{r}a^4 - 48a^3 + ra^2(11d+\beta) - 5ar^2 d + r^3 d + a^3(\alpha^2+\beta^2). \tag{1,9}$$

Infinè si ha:

$$d = A \cdot A \cdot A = aH \cdot aH \cdot aH = a^3 H^3. \tag{1,10}$$

Per ognuna delle varietà da noi prese in esame, al variare di r, sono noti i valori di H^3 e di $\chi(V)$, essi compaiono ad esempio nella tabella riportata in [I-S]; basta tener conto che nel nostro caso $\chi(V) = 4 - 2h^{1,2}(V)$ (si veda [H]) e che $h^{1,2}(V)$ risulta anche essere la dimensione della Jacobiana intermedia di V, dimensione riportata nella suddetta tabella. Pertanto la (1,9) è una equazione nelle sole incognite intere a, α, β; è possibile così caso per caso determinarne le soluzioni, a ciascuna di esse corrisponde una possibile immersione di V in $G(1,4)$. D'ora in poi per soluzione della (1,9) intenderemo una terna di numeri interi a, α, β, $a \geq 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, α e β non entrambi nulli, che soddisfa quell'equazione.

Determinazione dei valori di α e β.

Per comodità indichiamo ogni 3-varietà della tabella di [I-S] con il numero, da 1) a 18), con cui essa vi appare.

Sia $r = 4$; si ha la numero 1) della lista, in tal caso $\chi(V) = 4$ e $H^3 = 1$; dalla (1,10) e dalla (1,6) segue:

$$d = \alpha + 2\beta = a^3 \tag{2,1}$$

e la (1,9) diventa, dopo aver semplificato per $a^2 > 0$:

$$5a\beta^2 + 4(1 - a^4)\beta + a^7 - 15a^4 + 44a^3 - 50a^2 + 20a = 0. \tag{2,2}$$

È facile vedere che la (2,2), considerata come equazione di secondo grado in β, ha discriminante negativo per $a \geq 5$. Per gli altri valori di a una verifica diretta permette di stabilire che le uniche soluzioni possibili sono:

$$\begin{array}{lll} a = 1 & \alpha = 1 \ \beta = 0 & \\ a = 2 & \alpha = 0 \ \beta = 4 & \alpha = 4 \ \beta = 2. \end{array}$$

Sia $r = 3$; anche in tal caso si ha soltanto la numero 2) della lista, $\chi(V) = 4$, $H^3 = 2$ e

$$d = \alpha + 2\beta = 2a^3 \tag{2,3}$$

la (1,9), con le ovvie semplificazioni, diventa:

$$5a\beta^2 + (3 - 8a^4)\beta + 4a^7 - 30a^4 + 66a^3 - 50a^2 + 10a = 0. \tag{2,4}$$

Il discriminante di (2,4) è negativo per $a \geq 4$. Per gli altri valori di a una verifica diretta permette di stabilire che le sole soluzioni sono:

$$a = 1, \alpha = 0, \beta = 1; a = 1, \alpha = 2, \beta = 0.$$

Sia $r = 2$, abbiamo 5 possibilità; poniamo $H^3 = s$ con $1 \leq s \leq 5$; abbiamo:

$$d = \alpha + 2\beta = a^3 s \tag{2,5}$$

e la (1,9) diventa:

$$\begin{aligned} 5a\beta^2 + 2(1 - 2sa^4)\beta + s^2a^7 - 15sa^4 + \\ + 22sa^3 + 20(3 - s)a^2 + [\chi(V) - 48 + 8s]a = 0. \end{aligned} \tag{2,6}$$

Con la stessa tecnica usata nei casi precedenti si stabilisce che, al variare di s, la (2,6) ha solo queste soluzioni:

$s = 1$	*nessuna*	*soluzione*		3)
$s = 2$	$a = 2$	$\alpha = 0$	$\beta = 8$	4)
$s = 3$	$a = 2$	$\alpha = 4$	$\beta = 10$	5)
	$a = 2$	$\alpha = 6$	$\beta = 9$	
	$a = 1$	$\alpha = 3$	$\beta = 0$	
$s = 4$	$a = 1$	$\alpha = 0$	$\beta = 2$	6)
$s = 5$	$a = 1$	$\alpha = 1$	$\beta = 2.$	7)

Nei casi $s = 1, 2$ occorre tener presente che H non è molto ampio per V e, quindi, $a \geq 2$, se $s = 2$, però, $2H = -K_V$ è molto ampio perchè V è della serie principale, (si vedano [C] pag. 81 e [M]).

Sia $r = 1$; in tal caso è comodo porre $H^3 = (2g - 2)$ ove g è il *genere* della 3-varietà di Fano V, (si vedano [C] e [M]), i cui possibili valori sono riportati nella tabella di [I-S]. Abbiamo:

$$d = \alpha + 2\beta = a^3(2g - 2) \tag{2,7}$$

e la (1,9) diventa:

$$\begin{aligned} 5a\beta^2 + [1 - 4a^4(2g - 2)]\beta + a^3(2g - 2)[a^4(2g - 2) - 15a + 11] + \\ + [120 - 5(2g - 2)]a^2 + [\chi(V) - 48 + (2g - 2)]a = 0. \end{aligned} \tag{2,8}$$

Esattamente come in precedenza si può stabilire che quando V è iperellittica, numeri 8) e 10), la (2,8) non ha soluzioni, negli altri casi:

$g=3$	$a=1$	$\alpha=4$	$\beta=0$	9)
$g=4$	$a=1$	$\alpha=0$	$\beta=3$	11)
$g=5$	$a=1$	$\alpha=2$	$\beta=3$	12)
$g=6$	$a=1$	$\alpha=2$	$\beta=4$	13)
$g=7$	*nessuna*	*soluzione*		14)
$g=8$	$a=1$	$\alpha=4$	$\beta=5$	15)
		$\alpha=2$	$\beta=6$	
$g=9$	$a=1$	$\alpha=4$	$\beta=6$	16)
$g=10$	$a=1$	$\alpha=4$	$\beta=7$	17)
$g=12$	*nessuna*	*soluzione.*		18)

Esistenza di V.

È chiaro che le varietà numero 3-8-10-14-18 non possono essere immerse in $G(1,4)$ poiché per esse la (1,9) non ammette soluzioni.

Il calcolo effettuato fino ad ora ci consente solamente di stabilire che se qualcuna delle altre può essere immersa in $G(1,4)$ allora i suoi caratteri a, α, β sono fissati dalle tabelle precedenti; ad esempio quando $a = 1$ V può essere immersa solo dal sistema lineare $|H|$ completo o meno. Tuttavia in molti casi è possibile dire effettivamente se V esiste come sottovarietà di $G(1,4)$ o no.

È ben noto che la numero 7), immersa dal sistema lineare completo $|H|$ in $\mathbb{P}^6$, ($a=1$), risulta essere la sezione di $G(1,4)$ con tre iperpiani di $\mathbb{P}^9$; ed infatti in $H^*(G)$: $\Omega^3 = \Omega(0,4) + 2\Omega(1,3)$ ($\alpha = 1$, $\beta = 2$). Analogamente la numero 13), immersa in $\mathbb{P}^7$ dal sistema lineare completo $|H|$ ($a=1$), risulta essere la sezione di $G(1,4)$ con due iperpiani ed una iperquadrica di $\mathbb{P}^9$; ed infatti in $H^*(G)$; $2\Omega\Omega^2 = 2\Omega^3 = 2\Omega(0,4) + 4\Omega(1,3)$ ($\alpha = 2$, $\beta = 4$).

La numero 1) immersa da $|H|$ ($a=1$), è $\mathbb{P}^3$; ed in $G(1,4)$ esistono spazi proiettivi tridimensionali ad esempio il ciclo $\Omega(0,4)$ stesso, ($\alpha = 1$, $\beta = 0$).

Esistono inoltre altre due immersioni di $\mathbb{P}^3$ tramite $|2H|$ in $G(1,4)$, si veda [T]; nel primo caso V è costituita dalle rette di un'iperquadrica di $\mathbb{P}^4$, nel secondo dalle rette che uniscono i punti di due iperpiani di $\mathbb{P}^4$ che si corrispondono in una proiettività tale da non avere punti uniti nel 2-piano comune ai due iperpiani in questione. Poichè $V\Omega(0,4) = \alpha\Omega(0,1)$

e $V\Omega(1,3) = \beta\Omega(0,1)$, si ha che α è il numero di rette della famiglia parametrizzata da V che passano per un punto generico di $\mathbb{P}^4$, β è il numero di rette contenute in un generico iperpiano di $\mathbb{P}^4$ ed incidenti una generica retta di tale iperpiano. È facile vedere che nel primo caso $\alpha = 0$, $\beta = 4$. Nel secondo $\alpha = 4$, $\beta = 2$, infatti, chiamata f la proiettività, chiamati A e B i due iperpiani, si ha che f induce una proiettività nella stella di rette centrata in un generico punto P di $\mathbb{P}^4$; le rette di V passanti per P sono le rette unite di tale proiettività, quindi $\alpha = 4$; fissato poi un iperpiano C di $\mathbb{P}^4$ esso taglia A e B in due 2-piani π e τ, $f(\pi)$ seca τ lungo una retta l, $f(\tau)$ seca π lungo una retta r; C conterrà dunque le rette di V che uniscono punti di l e di r che si corrispondono nella f, tali rette costituiscono un regolo di una quadrica in C; una generica retta di C incide due di tali rette, dunque $\beta = 2$.

L'esistenza è garantita anche per la numero 2) quando $\alpha = 0$, $\beta = 1$, per la 6) e per la 11); infatti: la 2) immersa da $|H|$ in $\mathbb{P}^4$ risulta essere un'iperquadrica; in $G(1,4)$ esiste $G(1,3)$, iperquadrica di $\mathbb{P}^5$, corrispondente al ciclo $\Omega(2,3)$; per ottenere V basta secare $G(1,3)$ con un iperpiano del $\mathbb{P}^9$ di immersione di $G(1,4)$ ottenendo: $\Omega\Omega(2,3) = \Omega(1,3)$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$). Per la numero 6), immersa da $|H|$ in $\mathbb{P}^5$ come intersezione completa di due iperquadriche, basta considerare la sezione di $G(1,3)$ con un'iperquadrica di $\mathbb{P}^9$ ottenendo: $2\Omega\Omega(2,3) = 2\Omega(1,3)$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$). Per la 11), immersa da $|H|$ in $\mathbb{P}^5$ come intersezione completa di una ipersuperficie quadrica ed una cubica, basta considerare l'intersezione di $G(1,3)$ con un'ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^9$ ottenendo: $3\Omega\Omega(2,3) = 3\Omega(1,3)$ ($\alpha = 0$, $\beta = 3$).

Al contrario la numero 2) quando $\alpha = 2$, $\beta = 0$; la 5) quando $\alpha = 3$, $\beta = 0$; la 9) $\alpha = 4$, $\beta = 0$ non esistono in $G(1,4)$ in forza della seguente

PROPOSIZIONE: *sia V una sottovarietà (irriducibile e ridotta) di $G(1,4)$ parametrizzante una famiglia F di rette di $\mathbb{P}^4$; se in $H^\star(G)$ $V = \alpha\Omega(0,4)$ $\alpha \geq 1$, allora $V = \mathbb{P}^3$ e $\alpha = 1$.*

Dimostrazione.: poichè $V\Omega(0,4) = \alpha$ e $V\Omega(2,3) = 0$ risulta che:

I) per un generico punto di $\mathbb{P}^4$ passano α rette di F

II) il generico iperpiano di $\mathbb{P}^4$ non contiene rette di F.

Grazie alla dualità esistente in $\mathbb{P}^4$, per cui $G(1,4) \simeq G(2,4)$, V parametrizza anche una famiglia F' di piani di $\mathbb{P}^4$ tali che:

I)' un generico iperpiano di $\mathbb{P}^4$ contiene α piani di F'

II)" per il generico punto di $\mathbb{P}^4$ non passano piani di F'.

A causa di I)' e II)' i piani di F' spazzano un'ipersuperficie W di $\mathbb{P}^4$ contenente ∞^3 piani; per il generico punto liscio di W passano ∞^2 piani contenuti in W, dunque W è un iperpiano, contato α volte in conseguenza di I)'.

Poichè V parametrizza gli ∞^3 piani di W, deve essere $V = \mathbb{P}^3$ contato α volte; siccome V è ridotta $\alpha = 1$.

È facile vedere, con la stessa tecnica precedentemente usata, che le 3-varietà di Fano non ancora esaminate non possono essere immerse in $\mathbb{P}^5$ né nella sezione di $G(1,4)$ con un iperpiano generico.

Si può infine escludere l'esistenza in $G(1,4)$ della 12). Infatti essa, dovendo essere immersa da $|H|$ risulterebbe intersezione completa liscia di tre iperquadriche di un $\mathbb{P}^6$ contenuto nel $\mathbb{P}^9$ di immersione di G (si veda [C]).

Dunque la 12) dovrebbe essere contenuta nella sezione di $G(1,4)$ con tre iperpiani tangenti. La sezione di G con tre iperpiani tangenti corrisponde (si veda [R-S], pag. 274, TH. 29) alla famiglia F delle rette di $\mathbb{P}^4$ incidenti tre dati piani di $\mathbb{P}^4$.

V dovrebbe dunque parametrizzare una famiglia di rette di $\mathbb{P}^4$, contenuta in F, e tale che per il generico punto di $\mathbb{P}^4$ passino 2 rette di tale famiglia, $(\alpha = 2)$.

Se si esaminano le diverse configurazioni possibili con tre piani di $\mathbb{P}^4$ si vede che la dimensione di F, non sempre pura, è 3 oppure 4. Nel primo caso per il generico punto di $\mathbb{P}^4$ passano una o nessuna retta di F che, quindi, non può coincidere con V nè contenere V. Nel secondo caso o F coincide con l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^4$ incidenti una data retta, (quando i tre piani si tagliano lungo questa retta), oppure è l'unione di tale insieme con quello delle rette contenute in un iperpiano di $\mathbb{P}^4$, (quando i tre piani appartengono ad uno stesso fascio). Quest'ultima famiglia di rette è parametrizzata da $G(1,3)$, iperquadrica di $\mathbb{P}^5$, che non può contenere V dato che V non può stare in un $\mathbb{P}^5$.

Se si determinano le equazioni di $G(1,4)$ in $\mathbb{P}^9$ (cfr [K-L]) e quelle di tre iperpiani tangenti che tagliano su di essa la varietà quadridimensionale W, corrispondente alla famiglia delle rette di $\mathbb{P}^4$ incidenti una data retta r, si ottiene che W è un cono in $\mathbb{P}^6$, (con vertice un punto, corrispondente alla retta r), sulla intersezione non completa di tre iperquadriche di $\mathbb{P}^5$ di equazioni: $X_2X_4 = X_1X_5$, $X_3X_4 = X_1X_6$,

$X_3X_5 = X_2X_6$. Si può così stabilire che W non può contenere V, ossia l'intersezione completa di tre iperquadriche dello stesso $\mathbb{P}^6$. Dunque V non può essere immersa in $G(1,4)$.

In conclusione il problema dell'effettiva esistenza o meno di V in $G(1,4)$ resta aperto solo quando V è la numero 4), 5) (quando $a = 2$), 15), 16), 17).

BIBLIOGRAFIA

[A] Alzati A., *Varietà di Grassmann e loro sottovarietà,* Rend. Sc. Ist. Lomb. A **118** (1984), 323-345.

[C] Conte A., *Introduzione alle varietà algebriche a tre dimensioni,* Quaderno U.M.I; numero 22, ed. Pitagora Bologna 1982.

[G] Goldstein N., *The geometry of surfaces in the 4-quadric,* preprint.

[H] Hirzebruch F., *Topological methods in Algebraic Geometry,* terza ed. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[I_1] Iskohvskih V.A., *Fano threefolds I,* Izv. Akad. Nauk. SSR **41** (1977) 516-562.

[I_2] Iskohvskih V.A., *Fano threefolds II,* Izv. Akad. Nauk. SSR **42** (1978) 504-549.

[I-S] Iskohvskih V.A., Shokurov V.V., *Biregular theory of Fano threefolds,* in Algebraic Geometry Copenaghen 1978 ed. K. Lønsted, Springer Lecture Notes **732** 171-182.

[K-L] Kleiman S., Laksov D., *Schubert calculus,* Am. Math. Monthly **79** (1972) 1061-1082.

[L-T] Lanteri A., Turrini C., *Some formulas concerning nonsingular algebraic varieties embedded in some ambient variety,* Acc. Sc. Torino, Rend. cl. sc. fis. mat. nat. **116** (1982).

[M] Murre J.P., *Classification of Fano threefolds according to Fano and Iskohvskih,* in Algebraic threefolds Varenna 1981 ed. A. Conte. Springer Lecture Notes 947.

[P_1] Papantonopoulou A., *Embeddings in $G(1,3)$,* Proc. of the A.M.S. **89**-4 (1983) 583-586.

[P_2] Papantonopoulou A., *Embeddings of Geometrically Ruled Surfaces in the 4-quadric,* Proc. of the Can. Math. Soc. Conference, Vancouver 1984.

[R-S] Roth L., Sempre J.G., *Introduction to Algebraic Geometry,* Clarendon Press, Oxford (1985).

[T] Tango H., *On $(n-1)$-dimensional projective spaces contained in the Grassmann variety $Gr(n,1)$,* J. Math. Kyoto Univ. **14**-3 (1974) 415-460.

Dipartimento di Matematica "F. Enriques"
Università degli Studi di Milano
Via C. Saldini, 50
20133 Milano