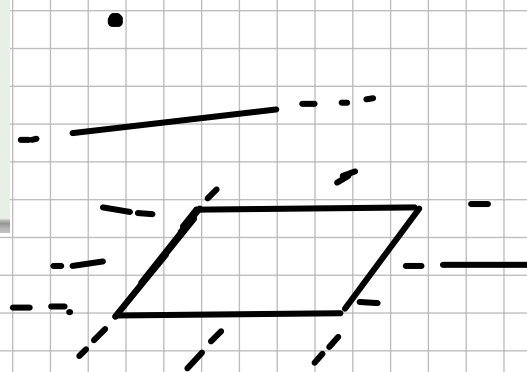


Lezione n°1

Definizione ["cosa è" (numero, oggetto, frutta, ...)]
"CARATTERISTICA"

ENTI PRIMITIVI

- il punto
- la retta
- il piano.



I Postulati

È UNA VERITÀ ; "ACCETTO LA FRASE"
(enunciato)

Teoremi

È un enunciato, NON ACCETTO LA FRASE PERCHÉ
LA POSSO DIMOSTRARE

IPOTESI

+

TESI

=

TEOREMA

Affermazione
certa -
Punto di partenza

N.B. Non si può mai
contraddire

Obiettivo, ciò
che voglio
dimostrare

Punto di arrivo

N.B. La Tesi si
può contraddire

Enunciato del teorema:

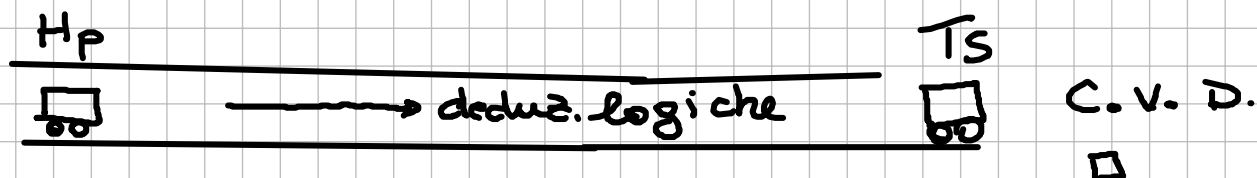
«Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti».

Ipotesi «Un triangolo è isoscele».

Tesi «(Il triangolo) ha due angoli congruenti».

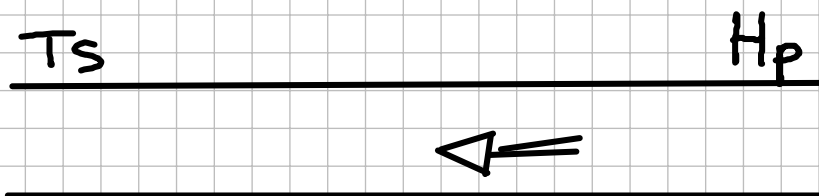
punto di partenza

cioè che voglio dimostrare



Condiz. necessaria $\rightarrow$

Viceversa: Percorso inverso, invertiamo l'ipotesi con la tesi, condizione sufficiente



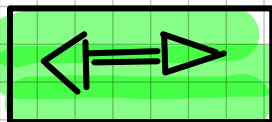
«Se in un triangolo due angoli sono congruenti, allora esso è isoscele».

Ipotesi «Due angoli di un triangolo sono congruenti».

Tesi «(Il triangolo) è isoscele».

Nasce la C.N.S. "Condizione Necessaria e Sufficiente",

- se e solo se opp.



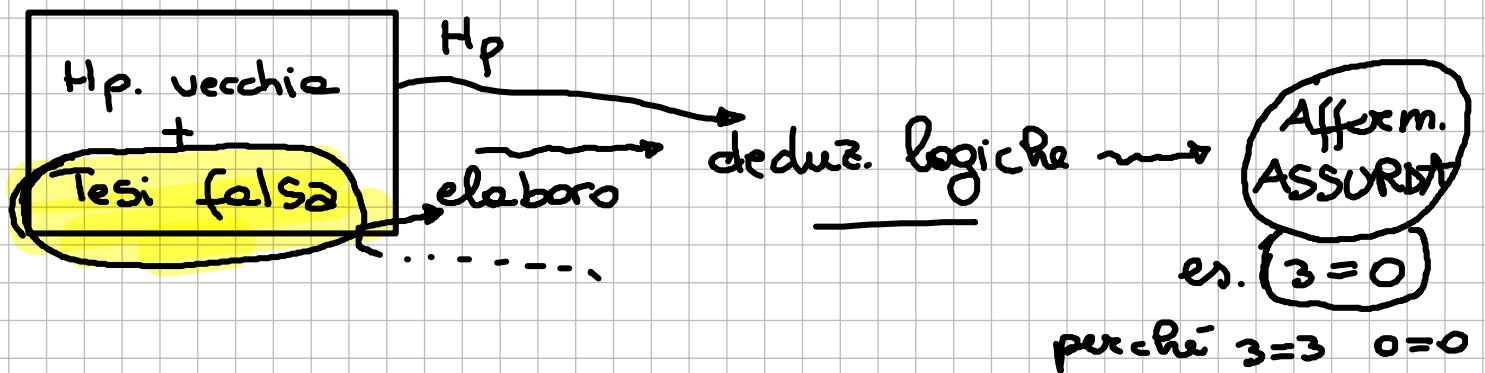
I teoremi con $\Leftrightarrow$ sono detti "caratterizzazioni"

Tecniche dimostrative

- 1. Deduz. logiche partendo dall'ipotesi e arrivo alla tesi
- 2. Dimostrazione per assurdo

Hp. Affermaz. certa e rimane certa

Tesi: Nego la tesi; "suppongo per assurdo che la tesi sia falsa"



quindi la causa è la tesi falsa, il mio punto di partenza

cio' vuol dire che ho fatto male a negare la tesi, quindi la tesi è vera. c.v.d.

I Postulati di appartenenza

Primo postulato Per due punti distinti di un piano passa una e una sola retta.

Secondo postulato Su una retta ci sono almeno due punti.

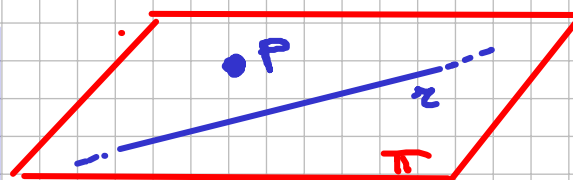
è un'affermazione certa e non si deve dimostrare

Dato un piano π

Terzo postulato Per ogni retta di un piano esiste almeno un punto, nel piano, che non le appartiene.

Linguaggio matematico

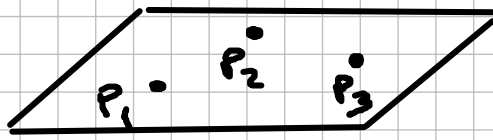
$$\forall r \subseteq \pi, \exists P \in \pi: P \notin r$$



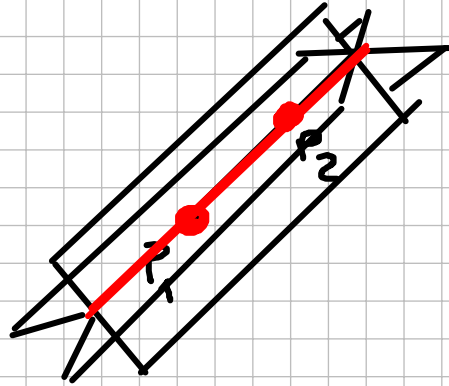
7

Postulati di appartenenza al piano:

1. Per 3 punti non allineati passa uno e un solo piano

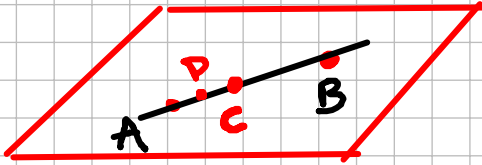


UN SOLO PIANO



Per 2 punti passano ∞ piani

2° Postulato: Dati $A, B \in \pi \Rightarrow r_{AB} \subseteq \pi$



Dire che non esiste né un primo né un ultimo punto significa affermare che la retta è illimitata.

Questo postulato, detto postulato dell'ordine, oltre a fissare un ordinamento su una retta, afferma in modo implicito che una retta è costituita da infiniti punti. Per esempio, prendiamo su una retta due punti A e B (figura 3). Il postulato afferma che fra A e B c'è un punto, che

lo chiamiamo C e la retta $r_{AC} \subseteq \pi$

Ripeto con la retta $r_{AC} = r_{AB}$, prendiamo due punti: A e D con D tra A e C e

consideriamo $r_{AD} \subseteq \pi$ ma $r_{AD} = r_{AC} = r_{AB} = \dots$

$\Rightarrow r$ ha ∞ punti

IL TEOREMA DI EUCLIDE

Prerequisiti

Obiettivi

Enunciato

Versione n° 1

"In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa,"

Versione n° 2

"In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa,"

Prerequisiti

Proporzioni

Proiezioni

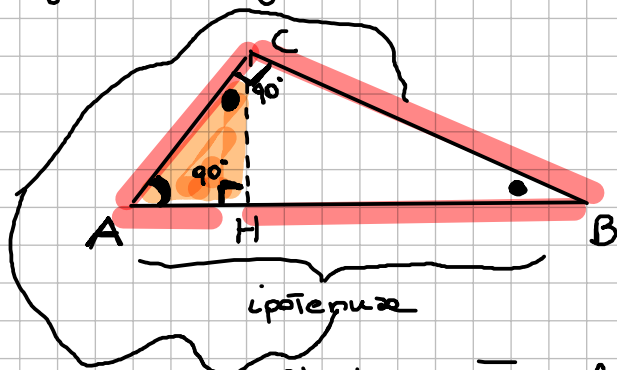
Classificazione dei triangoli in base agli angoli

Congruenza

Criteri di similitudine
concetto di altezza

Enunciato del teorema

Hp. Triangolo rettangolo



Ts un cateto è medio proporzionale tra ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa

$$* \quad \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AH}$$

Idem con il secondo cateto
 $\overline{AB} : \overline{CB} = \overline{CB} : \overline{HB}$

Consideriamo e disegniamo l'altezza CH rel. all'ipotenusa

Abbiamo scelto il cateto $\overline{AC}$, la tesi usa $\overline{AC} \rightarrow$ considero tutto in funzione

Consideriamo i triangoli $\triangle A\hat{C}H$ e $\triangle A\hat{B}C$, simili?

Osserviamo gli angoli: per ipotesi $\triangle ABC$ è rettangolo in $\hat{C}$

inoltre $\overline{CH}$ è l'altezza $\Rightarrow \triangle A\hat{H}C$ è rettangolo in $\hat{H}$

Poi l'angolo $\hat{A}$ è comune ad entrambi i triangoli quindi

necessariamente il terzo angolo è uguale $\angle A\hat{C}H = \angle A\hat{B}C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I DUE TRIANGOLI SONO SIMILI $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ I LATI SONO PROPORZIONALI

(sono quelli che opposti agli angoli congruenti)

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AH}$$

C.V.D.

Considerazione sulle proporzioni

$$\underbrace{\overline{AC}^2}_{\text{area quadrato}} = \underbrace{\overline{AB} \cdot \overline{AH}}_{\text{area del rettangolo}}$$

$\square$

Versione n°2

"In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa,"

Prerequisiti

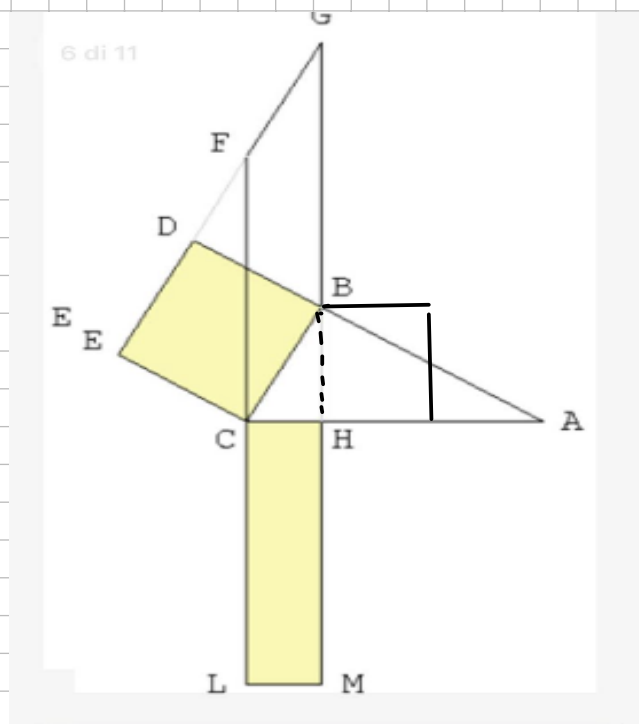
Proiezioni

H_p $\triangle ABC$ rettangolo in B

T_s $BDEC = HCLK$

$\overline{BC} = \overline{CE}$
per costruzione

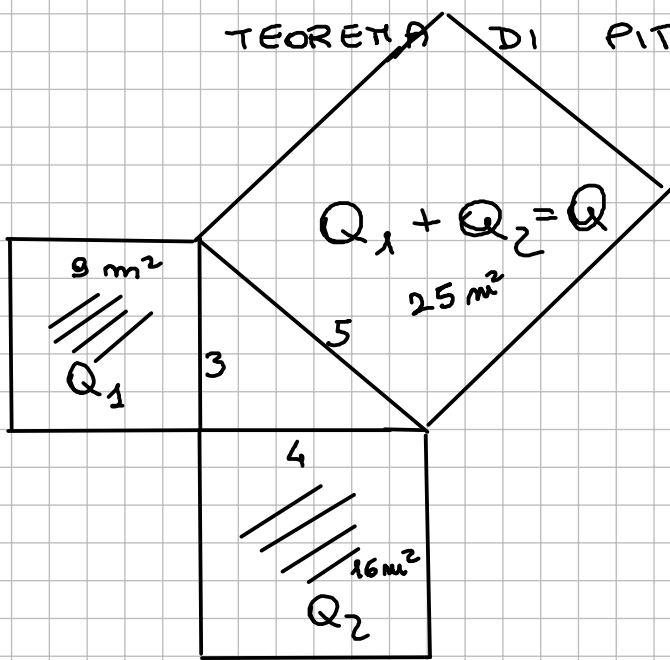
Prolungo il lato ED dalla parte di D fino ad incontrare CC' prolungato dalla parte di C , e HM dalla parte di H



$\S$

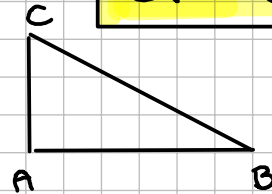
$$\overline{CL} = \overline{AC}$$

TEOREMA DI PITAGORA



$$9 + 16 = 25$$

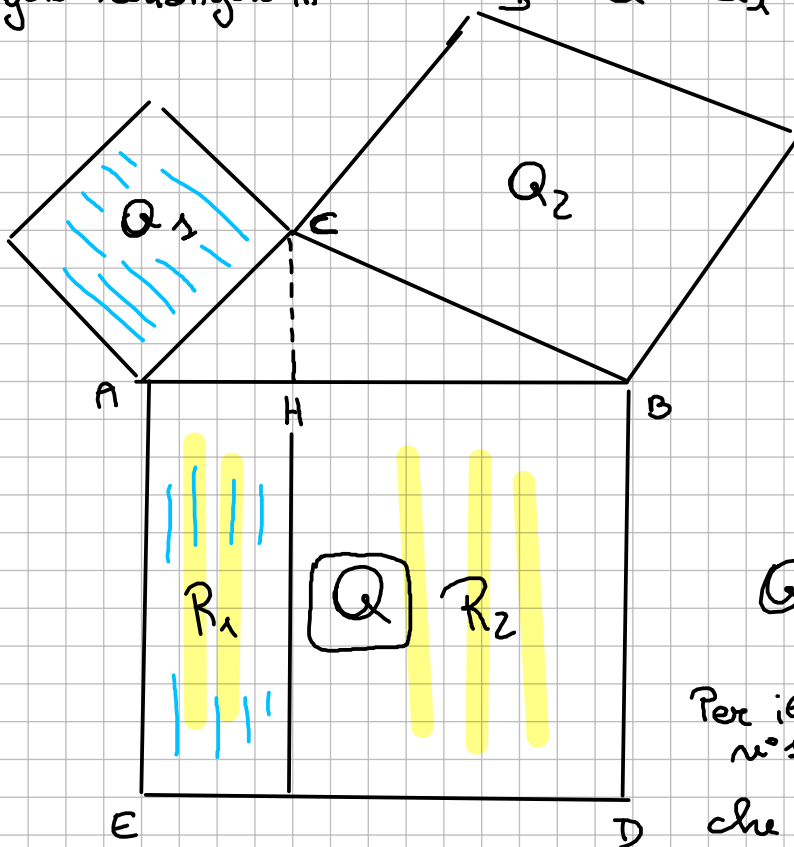
$$Q = Q_1 + Q_2$$



Enunciato: "Dato un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti"

Hp. Un triangolo rettangolo in $\hat{C}$

$$Q = Q_1 + Q_2$$



$$Q = R_1 + R_2$$

Per il teorema di Euclide n°1 (versione 2)

che $R_1 = Q_1$

IDENT $R_2 = Q_2$

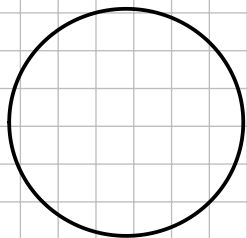
$$\Rightarrow Q = Q_1 + Q_2$$

C.V.D.

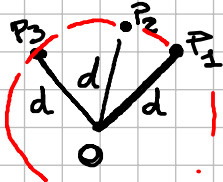
CIRCONFERENZA

DISEGNO ✓
DEFINIZIONE ✓

PROPRIETÀ (TEOREMI DA DIMOSTRARE)
CONSEGUENZE (COROLLARI)



Definizione: Il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro



uguale distanza da O

Unisco i punti con una linea curva, ottengo circonferenza

DEFINIZIONI (Prerequisiti per il teorema)

ARCO ($\widehat{AB}$) , def... (vedi libro)

ANGOLO ALLA CIRCONFERENZA

ANGOLO AL CENTRO



Vertice $\equiv$ Punto della circonferenza insiste sull'arco $\widehat{AB}$

vd libro

vd libro

$\widehat{AB}$

Proprietà (Teorema)

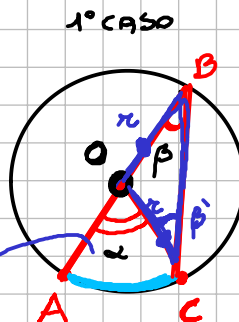
"In una circonferenza gli angoli alla circonferenza hanno un'ampiezza pari alla metà dell'angolo al centro corrispondente che insiste sullo stesso arco"

Dimostrazione

Il teorema presenta 3 casi

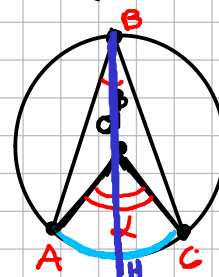
$$\beta = \frac{1}{2} \alpha \quad \text{Tesi}$$

angolo esterno



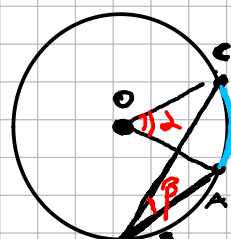
1° CASO

Il centro della circonferenza si trova su uno dei lati dell'angolo alla circonferenza. $O \in \widehat{AB}$



2° CASO

Il centro si trova dentro ang. alla circonferenza.



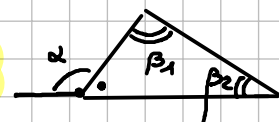
3° CASO

Il centro si trova fuori angolo alla circonferenza (β)

tre livelli

La dimostrazione ha bisogno di un prerequisito

"Teorema dell'angolo esterno di un triangolo"



dici che dato un triangolo, un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti

$$\alpha \cong \beta_1 + \beta_2$$

Considero il triangolo ^(bleu) OBC, ed $\hat{\alpha}$ angolo esterno ad esso
è isoscele

perché $\overline{OB} = \overline{OC} = r_{\text{raggio}} = r$

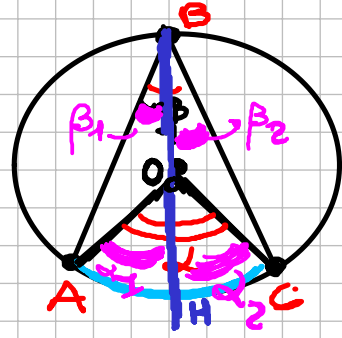
$\Rightarrow$ quindi gli angoli alla base congruenti $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$

Applico il teorema dell'angolo esterno $\Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\beta} = 2\beta$ c.v.d.
 $\hat{\alpha}$ è il doppio di $\hat{\beta}$

2° caso

congiungiamo il vertice B con il centro O e lo prolunghiamo fino ad ottenere il diametro $\overline{BH}$

2° caso



Ho spezzato β in 2 angoli:
 β_1 β_2

$\Rightarrow$ in questo modo il centro O si trova su il lato $\overline{BH}$, lato dell'angolo alla circonferenza che insiste su $\widehat{AH}$

Per il caso n°1 $\rightarrow \alpha_1 = 2\beta_1$

+

idem dell'altro lato, sempre per il caso n°1 $\rightarrow \alpha_2 = 2\beta_2$

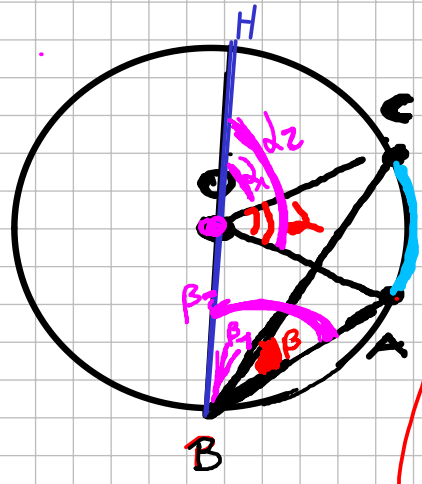
Sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 2\beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha &= 2(\beta_1 + \beta_2) \\ &\quad \beta \end{aligned}$$

$\alpha = 2\beta$ c.v.d.

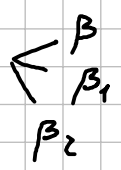
3° caso

3° caso



Uniamo B con O, fino ad ottenere $\overline{BH}$

$\beta_2 = \widehat{ABH}$ $\beta_1 = \widehat{CBH}$

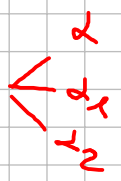


Vedo $\hat{\beta}$ come differenza di 2 angoli:

$\hat{\beta} = \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$ (*)

Consideriamo gli angoli al centro corrispondenti

$\alpha_2 = \widehat{AOH}$ $\alpha_1 = \widehat{COH}$



■ Noto che il centro O si trova sul lato $\overline{BH}$, lato dell'angolo alla circonferenza $\hat{\beta}_2 \rightarrow$ per il caso 1 $\rightarrow \alpha_2 = 2\hat{\beta}_2 \rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{1}{2}\alpha_2$

■ IDEM per $\hat{\beta}_1 \rightarrow$ NOTO CHE IL CENTRO O SI TROVA SUL LATO $\overline{BH}$, lato anche di $\hat{\beta}_1$

$$\rightarrow \text{per il caso 1} \rightarrow \hat{\alpha}_1 = 2 \hat{\beta}_1 \rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1$$

$$\text{Sostituiamo (*) in } \hat{\beta} = \frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2} \hat{\alpha} \quad \text{c.v.d.}$$

Lezione n°4

Questa frase Einstein la scrisse in una lettera dedicata a suo figlio.



Albert Einstein e "la filosofia della bicicletta"



I solidi sono tutti gli oggetti che occupano uno spazio

- Figura piana (a 2 dimensioni): disegno da colorare
- Figura solida (a 3 dimensioni): peluche

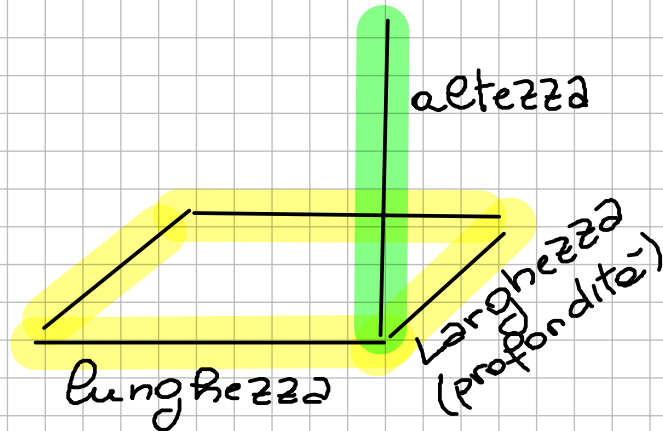
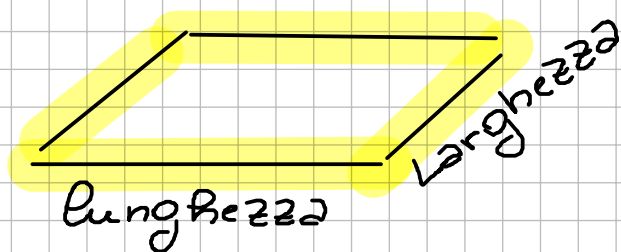
Quindi le figure piane hanno solo 2 DIMENSIONI:

Lunghezza e Larghezza



Larghezza

Lunghezza



Le Figure **SOLIDE** HANNO
3 DIMENSIONI

(Succo di frutta)

Gli elementi dei solidi :

- **FACCIA** (poligono)
- **SPIGOLO** (lato poligono, intersezione tra 2 facce)
- **VERTICE** (nei solidi è l'intersezione di 3 o più spigoli)

Quindi un solido è una figura che occupa uno spazio a 3 dimensioni

I solidi si dividono in **2** gruppi : **POLIEDRI** E **SOLIDI DI ROTAZIONE**

■ **POLIEDRI** : (solidi regolari, prismi, piramidi)

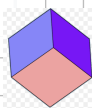
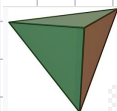
**SOLIDI
REGOLARI**

(delimitati da poligoni posti su piani diversi
tale che ogni lato sia comune a due di essi)

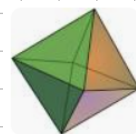
Tetraedro (4 facce triangolari)

Cubo o esaedro (6 facce quadrate)

Ottaedro (8 facce triangolari)



Cubo di
Rubik



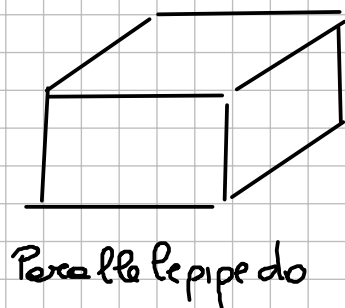
)

Dodecaedro (12 facce pentagonali)

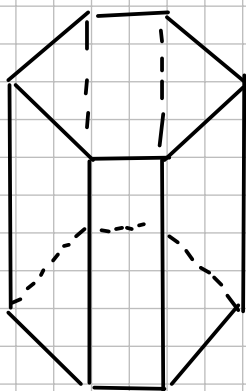


...

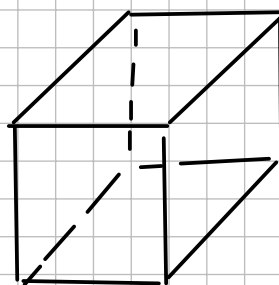
■ **PRISMI**: 2 basi congruenti e parallele



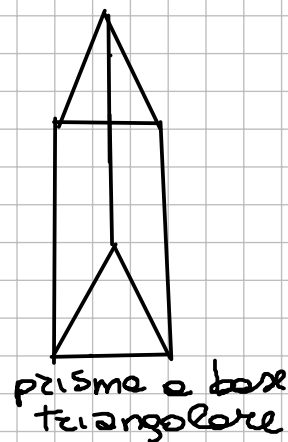
Parallelepipedo



Prisma a base esagonale

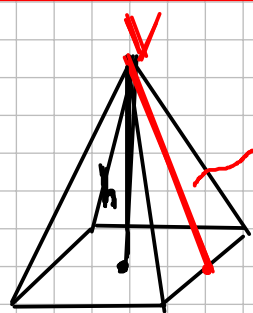


(cubo) è un prisma
ma rientra anche
nei poliedri regolari



prisma a base triangolare

■ **PIRAMIDI** (a punta) una sola base data da un poligono qualsiasi e da un punto detto vertice esterno al piano della base



Apothema
è
l'altezza
del
triangolo-faccia

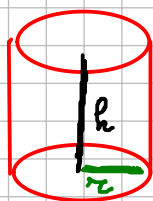
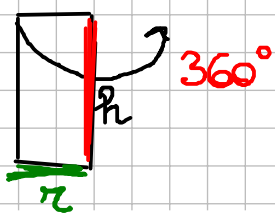
■ **SOLIDI DI ROTAZIONE** (presentano una superficie curva)

Un solido di rotazione è un solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta r secondo un angolo $\hat{\alpha}$

Se $\hat{\alpha} = 360^\circ \rightarrow$ rotazione completa

I più semplici sono:

■ **CILINDRO**: solido di rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati



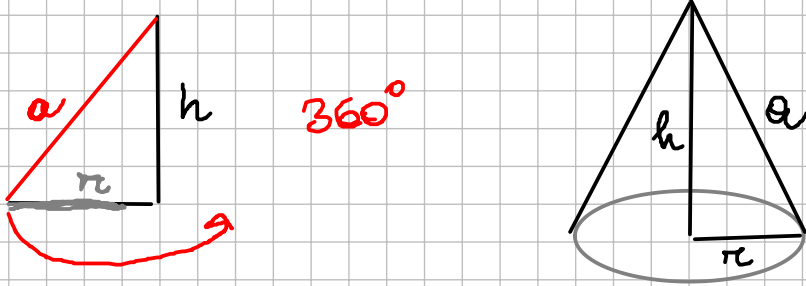
IL LATO attorno a cui
ruota è detto
altezza del cilindro

gli altri due lati del rettangolo sono detti raggi di base

Un cilindro si dice EQUILATERO se la sua altezza è congruente al diametro della base ($h = 2r$)

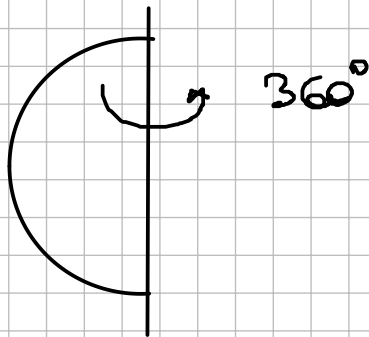
■ CONO: generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti (detto h)

Invece l'ipotenusa viene detta **APOTEMA DEL CONO** (a)



IL CONO SI DICE EQUILATERO : apotema = diametro base
($a = 2r$)

Superficie
sferica



ruota la semicirconferenza
attorno al diametro

Che differenza c'è tra superficie sferica e sfera:
la **superficie sferica** è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro O distanza uguale al raggio
($=$)

la **sfera** è il luogo dei punti dello spazio che hanno dal centro O distanza ($\leq$) al raggio
minore o uguale