# Corso Zero
# Regola di Ruffini e prodotti notevoli

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

September 19, 2022

# Prodotti notevoli

**Quadrato di un binomio**

Consideriamo il binomio $(A+B)^2$, in cui $A$ e $B$ rappresentano due monomi ed analizziamo che cosa succede moltiplicando il binomio per se stesso, $(A+B)(A+B)=(A+B)^2$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

Pertanto, senza effettuare i passaggi intermedi si ha

$\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2}$

Quindi, il quadrato di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il quadrato del primo termine, il quadrato del secondo termine e il doppio prodotto del primo termine per il secondo.

# Prodotti notevoli

**Quadrato di un trinomio**

In modo del tutto analogo, considerando il trinomio $A + B + C$, il suo quadrato sarà uguale a

$$\boxed{(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2\,AB + 2\,BC + 2\,AC}$$

Ancora una volta, fare attenzione ai segni quando si eseguono i doppi prodotti:

ad esempio,$(2a + b^2 - x^3y)^2 = 4a^2 + b^4 + x^6y^2 + 4ab^2 - 4ax^3y - 2b^2x^3y$

# Prodotti notevoli

**Prodotto della somma fra due monomi per la loro differenza**

Consideriamo due monomi, $A$e $B$, e i binomi che otteniamo dalla loro somma e dalla loro differenza: $A + B$ e $A - B$.

Eseguiamone il prodotto:

$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$

Quindi:

$\boxed{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$

In generale, il prodotto tra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

Ad esempio,

$(2a^2 + 3b^3)(2a^2 - 3b^3) = (2a^2)^2 - (3b^3)^2 = 4a^4 - 9b^6$

# Prodotti notevoli

**Cubo di un binomio**

Ora eseguiamo il cubo di un binomio: $(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = (A+B)(A^2+2AB+B^2) = A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3$ che raccogliendo i termini simili è uguale a $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

In definitiva: $\boxed{(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3}$

Possiamo dunque dire che il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica tra il cubo del primo termine, il cubo del secondo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine ed il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine.

Qui bisogna prestare particolare attenzione ai segni:

per esempio

$$\begin{aligned}(2a-b^2)^3 &= (2a+(-b^2))^3 = \\ &= 8a^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-b^2)+3\cdot(2a)\cdot(-b^2)^2+(-b^2)^3 = \\ &= 8a^3-12a^2b^2+6ab^4-b^6\end{aligned}$$

# Prodotti notevoli

**Somma o differenza di cubi**

Ora eseguiamo il seguente prodotto:

$(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3 - A^2B + A^2B + AB^2 - AB^2 + B^3 = A^3 + B^3$

Il trinomio $A^2 - AB + B^2A$ è comunemente noto come falso quadrato, poichè differisce da quadrato di un binomio solo per il fattore 2 . Leggendo la catena di uguaglianze nell'altro verso, possiamo concludere che

$\boxed{A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)}$

Con calcoli del tutto analoghi, si conclude che

$\boxed{A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)}$

Notare come il segno presente nel falso quadrato sia l'opposto di quello tra i due cubi, mentre il segno presente nel binomio sia invece lo stesso.

Facciamo un esempio:

$$\begin{aligned} 8a^6 - 27b^3 &= (2a^2)^3 - (3b)^3 = \\ &= (2a^2 - 3b)((2a^2)^2 + 2a^2 \cdot 3b + (3b)^2) = \\ &= (2a^2 - 3b)(4a^4 + 6a^2b + 9b^2) \end{aligned}$$

# Divisione dei polinomi

In matematica, la divisione dei polinomi è un algoritmo che permette di trovare il quoziente tra due polinomi, di cui il secondo di grado non superiore al grado del primo. È un'operazione che si può svolgere a mano, poiché spezza il problema in varie divisioni tra monomi, facilmente calcolabili.
Ricordiamo che, se i polinomi sono a coefficienti reali (o più in generale in un campo) per ogni coppia di polinomi $A(x)$ e $B(x)$ esistono unici altri due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

posto che il grado di $R(x)$ sia minore di quello di $B(x)$.
Il grado di $Q(x)$ sarà equivalente invece alla differenza tra il grado di $A(x)$ e quello di $B(x)$
Nel caso in cui $R(x) = 0$, $A(x)$ sarebbe divisibile per $B(x)$.

# Algoritmo della divisione dei polinomi

L'algoritmo comporta l'esecuzione dei seguenti passi:
Per prima cosa si scrivono i due polinomi in questo modo, facendo attenzione a scrivere esplicitamente anche i termini nulli di $A(x)$ (ad esempio,$x^2 - 1x^2 - 1$ andrà scritto come $x^2 + 0x - 1x^2 + 0x - 1$).

Si divide il termine di grado massimo di $A(x)$ per il termine di grado massimo di$B(x)$ e si scrive il risultato sotto $B(x)$.
Si moltiplica questo termine per il polinomio $B(x)$ e si scrive il risultato sotto $A(x)$, incolonnando ogni termine sotto il termine di $A(x)$ di grado uguale.

Si esegue la sottrazione tra $A(x)$ e il polinomio scritto sotto di esso.
Per costruzione, il termine in $x^n$ si eliderà, lasciando un polinomio di grado minore ($n-1$ o anche meno). Se il grado di questo polinomio differenza $R_1(x)$ è maggiore o uguale a quello di $B(x)$ si ripetono le operazioni da 2 a 4 considerando adesso $R_1$ come dividendo.
Quando si sarà raggiunto un polinomio $R_i(x)$ di grado inferiore a $B(x)$, allora tale polinomio $R_i(x)$ sarà il resto $R(x)$ della divisione; il polinomio formatosi mano a mano sotto $B(x)$, sarà invece il polinomio quoziente.

# Regola di Ruffini

La regola di Ruffini è un procedimento utilizzato per dividere due polinomi in cui il divisore sia un binomio di primo grado.
Vediamo la regola applicata a qualche esempio
Eseguiamo la seguente divisione:

$$(x^3 + 6 - x^2) : (1 + x)$$

- si ordinano i polinomi secondo le potenze decrescenti della variabile e si completa, se necessario il polinomio dividendo
- si crea la griglia in figura disponendo sulla riga in alto tutti i coefficienti del polinomio dividendo mettendo da parte il termine noto alla fine
- Nell'angolo in basso a sinistra si scrive l'opposto del termine noto del polinomio divisore, in questo caso $-1$
- si ricopia in basso il primo coefficiente del polinomio (1)
- si moltiplica il coefficiente 1 per il numero in basso a sinistra $(-1)$ e si scrive il risultato $(-1)$ nella seconda colonna

Vediamo la griglia

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -1 & 0 & 6 \\
 & & & & \\
-1 & & -1 & +2 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & 4
\end{array}
$$

- si sommano i numeri della seconda colonna ( -1 e -1 ) si scrive il risultato $(-2)$ in basso
- si moltiplica la somma ottenuta $(-2)$ per il numero in basso a sinistra $(-1)$ e si scrive il risultato $(2)$ nella terza colonna
- si sommano i numeri della terza colonna ( 0 e 2 ) e si scrive il risultato $(2)$ in basso
- si moltiplica la somma ottenuta $(2)$ per il numero in basso a sinistra $(-1)$ e si scrive il risultato $(-2)$ nell'ultima colonna
- si sommano i numeri dell'ultima colonna ( 6 e $-2$ ) e si scrive il risultato $(4)$ in basso.
- 4 è il resto della divisione
- i numeri dell'ultima riga $(1, -2, +2)$ rappresentano nell'ordine i coefficienti del polinomio risultato detto quoziente. Esso è un polinomio di un grado inferiore al polinomio dividendo

Per definizione di divisione si ha:
DIVIDENDO=(QUOZIENTE) (DIVISORE) + RESTO
quindi

$$x^3 - x^2 + 6 = (x^2 - 2x + 2)(x + 1) + 4$$

# Divisione con resto zero

Eseguiamo la seguente divisione:

$$(x^3 - 5x - 6 + 2x^2) : (x - 2)$$

Vediamo la griglia

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & & & \\ 2 & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

# Risultato

Si può quindi scrivere la seguente scomposizione del polinomio dividendo:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x^2 + 4x + 3)(x - 2)$$

Molto spesso, negli esercizi, capita di voler scomporre un polinomio di grado $n$, con $n \geq 2$. Non sempre, però, siamo abbastanza fortunati da avere un polinomio che sia riconducibile a un prodotto notevole, come per esempio accade se abbiamo a che fare con una somma o differenza di cubi, o con lo svolgimento della potenza di un binomio. Come possiamo fare in tutti gli altri casi?

Un metodo che può essere utile sfrutta la regola di Ruffini. Questo è un procedimento che, in certi casi, permette di scomporre un polinomio di grado $n$ nel prodotto di un polinomio di grado $n-1$ e un polinomio di 1º grado.
In questa lezione vedremo direttamente con un esempio svolto come tale regola si può applicare per scomporre un polinomio che sarebbe considerato inattaccabile utilizzando solamente le scomposizioni che derivano dai prodotti notevoli.

Bisogna sottolineare che la regola di Ruffini non funziona per tutti i polinomi: a volte, infatti, anche se certi polinomi sono scomponibili non riusciamo ad accorgercene utilizzando questo metodo.
Consideriamo il polinomio di quarto grado:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$$

Il nostro obiettivo è quello di scomporre $P(x)$ in due polinomi uno di 3º grado e uno di 1º grado utilizzando la regola di Ruffini, che andiamo a esporre direttamente applicata al nostro esempio.

Il primo passo del procedimento consiste nel cercare un numero tale che, una volta sostituito al posto di $x$, faccia diventare il polinomio uguale a zero; cioè, vogliamo un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che $P(a) = 0$.
Nella regola di Ruffini, il trucco che si applica per trovare questo numero è: cercare all?interno di tutti numeri della forma $\frac{a}{b}$ con $a$ divisore del termine noto del polinomio preso in considerazione e $b$ divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

Nel nostro esempio il termine noto è 6 e il coefficiente del termine di grado massimo è 2. Quindi abbiamo: $a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}, \quad b \in \{\pm 1, \pm 2\}$
e dunque, considerando tutte le combinazioni di aa e bb, abbiamo:
$\frac{a}{b} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$
Adesso si tratta di avere un pizzico di fortuna: proviamo a scegliere il numero $-1$ per vedere se
$P(-1) = 0$. Si ha:
$P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 - (-1) + 6 = 2 - 1 - 8 + 1 + 6 = 0$
e quindi $-1$ è un numero che fa al caso nostro.

Costruiamo uno schema che ci sarà utile per il nostro procedimento tale e quale a quello della divisione,

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\
 & & & & & \\
-1 & & -2 & 1 & 7 & -6 \\
\hline
 & 2 & -1 & -7 & 6 & 0
\end{array}
$$

Se il procedimento è stato eseguito correttamente, il resto deve essere uguale a zero.
Prendiamo i numeri scritti sotto la linea orizzontale e li interpretiamo come i coefficienti di un polinomio $Q(x)$.
Nel nostro esempio, i numeri ottenuti sono nell?ordine $2, -1, -7, 6$ e quindi abbiamo:
$Q(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$
La regola di Ruffini garantisce che:
$P(x) = Q(x) \cdot (x - a) \rightarrow P(x) = (2x^3 - x^2 - 7x + 6) \cdot (x + 1)$
Siamo quindi riusciti a scomporre il polinomio di partenza $P(x)$ in due polinomi diversi.

ATTENZIONE!
Quando nel polinomio da scomporre $P(x)$ mancano dei termini di grado minore al grado $n$ di $P(x)$, nello schema non si devono saltare le colonne corrispondenti a essi, ma bisogna posizionare degli 0 al loro posto.

Per esempio, prendiamo il polinomio $P(x) = x^4 - 2x + 1$
Si verifica facilmente che $P(1) = 0$, e dunque nel costruire lo schema possiamo scegliere $a = 1$. Lo schema risulta quindi:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

quindi

$$P(x) = x^4 - 2x + 1 = (x^3 + x^2 + x - 1)(x - 1)$$

Esegui, quando è possibile, le seguenti divisioni fra polinomi.

- $(x^4 + 3x^2 - 4) : (x^2 - 4)$, $R[Q = x^2 + 7; R = 24]$
- $(15a^3 - 8a^2 - 9a + 2) : (3a + 2)$, $R[Q = 5a^2 - 6a + 1; R = 0]$
- $(7a - a^3 + 2 + a^2) : (a^2 + 2)[Q = -a + 1; R = 9a]$

Esercizi Scomponi in fattori i seguenti polinomi, applicando la regola di Ruffini.

- $x^3 - 2x^2 - 3x + 6, \;\; R[(x-2)(x^2-3)]$
- $a^3 + 2a^2 + 2a + 1, \;\; R[(a+1)(a^2+a+1)]$
- $x^3 + 4x^2 - 5, \;\; R[(x-1)(x^2+5x+5)]$
- $x^2 + 7x + 12, \;\; R[(x+3)(x+4)]$
- $x^3 - x^2 + 2x - 8, \;\; R[(x-2)(x^2+x+4)]$
- $x^4 + 8x - x^3 - 8, \;\; R[(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)]$