CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare**- 11 Maggio 2022

Durata della prova: tre ore.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{cases} f(0,1,0) = (h-2,0,0,h-2) \\ f(1,0,1) = (2h-4,0,0,2h-5) \\ f(1,0,0) = (h-1,0,1,h-2) \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h, l'applicazione lineare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Determinare al variare del parametro h, la controimmagine $f^{-1}(2,0,2,0)$.
3. Sia $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione data da $p(x,y,z,t) = (x,z,t)$. Studiare al variare del parametro h, l'endomorfismo $\phi = p \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinando in ciascun caso $\operatorname{Im}\phi$ e $\operatorname{Ker}\phi$. Nel caso $h = 2$, studiare la semplicità di ϕ, determinando se possibile una base di autovettori.
4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $w_1 = (0,2,-2,2)$ e $w_2 = (-1,0,0,1)$ ed i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \; x+y-t = 2y+z-t = 0\}$ e $W = \mathcal{L}(w_1,w_2)$.Determinare $V \cap W$ e $V + W$.

Quesito Preliminari:

5. Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C(1,0)$ e raggio $r = 2$ e rappresentarla nel piano cartesiano. Determinare:
   - la retta u tangente a Γ nel punto $A(1,2)$
   - la retta s passante per il punto $A(1,2)$ e il punto $B(-1,0)$
   - la retta t perpendicolare alla retta u e passante per il punto $B(-1,0)$
   - il perimetro del triangolo creato dall'intersezione delle rette u, s, t.
   - Che tipo di triangolo è stato trovato?

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare**- 11 Maggio 2022

Durata della prova: tre ore.

I

Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{cases} g(1,0,1) = (2h-2,0,0,2h-3) \\ g(1,0,0) = (h,0,1,h-1) \\ g(0,1,0) = (h-1,0,0,h-1) \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h, l'applicazione lineare g, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$.

2. Determinare al variare del parametro h, la controimmagine $g^{-1}(2,0,2,0)$.

3. Sia $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione data da $p(x,y,z,t) = (x,z,t)$. Studiare al variare del parametro h, l'endomorfismo $\phi = p \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} \phi$ e $\operatorname{Ker} \phi$. Nel caso $h = 1$, studiare la semplicità di ϕ, determinando se possibile una base di autovettori.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (0,1,-1,1)$ e $v_2 = (2,0,0,-2)$ ed i sottospazi $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ t - x - y = z + 2y - t = 0\}$ .Determinare $V \cap W$ e $V + W$.

Quesito Preliminari:

5. Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C(1,0)$ e raggio $r = 2$ e rappresentarla nel piano cartesiano. Determinare:

   - la retta u tangente a Γ nel punto $A(1,2)$
   - la retta s passante per il punto $A(1,2)$ e il punto $B(-1,0)$
   - la retta t perpendicolare alla retta u e passante per il punto $B(-1,0)$
   - il perimetro del triangolo creato dall'intersezione delle rette u, s, t.
   - Che tipo di triangolo è stato trovato?

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare**- 15 Dicembre 2022

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (0,0,0,1), v_2 = (1,0,0,-1), v_3 = (0,-1,2,-1), v_4 = (-1,0,1,0)$. Sia dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = (0,0,h,0) \\ f(v_2) = (2,1,-1-h,h) \\ f(v_3) = (0,-h-1,-h,2h+1) \\ f(v_4) = (-2,-1,1,0), \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h, l'applicazione lineare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3. Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0\}$, determinare il valore di h per cui la restrizione $f|V$ induce un endomorfismo $\phi : V \longrightarrow V$ e in tal caso determinare $M^{\mathcal{A}}(\phi)$, dove $\mathcal{A}$ indica una base di V.

4. Date tre matrici B, C, D, assegnate nel modo seguente:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & h+1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ h & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h+1 \end{pmatrix},$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$, sia $A = C \cdot D$. Risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema $AX = B$.

Quesito Preliminari:

5. Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C(1,0)$ e raggio $r = 2$ e rappresentarla nel piano cartesiano. Dato il fascio di rette $y + 1 + k(y + x) = 0$, determina:

   - La retta del fascio passante per $A = (1,1)$
   - La retta del fascio perpendicolare alla retta $x - 4y - 1 = 0$
   - Le rette del fascio che hanno distanza dall'origine uguale a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
   - I valori di k per cui si ottiene una retta tangente alla parabola $y = x^2$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare**- 15 Dicembre 2022

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

IA

Date tre matrici B, M, N, assegnate nel modo seguente:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, sia $A =^t M \cdot N$. Risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema $AX = B$.

IB

Dato $v_1 = (-1, 0, 2, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, -1, 0, 1), v_4 = (1, 0, 0, 0)$. Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = (-4, 0, 0, 2k) \\ f(v_2) = (1, k+1, 0, 0) \\ f(v_3) = (k-1, -k, k, 0) \\ f(v_4) = (2, 0, 0, 0), \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro k, l'applicazione lineare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0\}$, determinare il valore di k per cui la restrizione $f|W$ induce un endomorfismo $g : W \longrightarrow W$ e in tal caso determinare $M^{\mathcal{A}}(g)$, dove $\mathcal{A}$ indica una base di W.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Quesito Preliminari:

4. Scrivere l'equazione della circonferenza Γ di centro $C(0, -2)$ e raggio $r = 1$ e rappresentarla nel piano cartesiano. Dato il fascio di rette $y + 1 + k(y + x) = 0$, determina:
   - La retta del fascio passante per $A = (1, 1)$
   - La retta del fascio perpendicolare alla retta $x - 4y - 1 = 0$
   - Le rette del fascio che hanno distanza dall'origine uguale a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
   - I valori di k per cui si ottiene una retta tangente alla parabola $y = x^2$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova in itinere di **Algebra lineare e Geometria** - 12 dicembre 2023

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

---

1 Esercizi Preliminari

a. Trovare la retta tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ e passante per il punto $P(0, 5)$.

b. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo avente come vertici i punti $A(6, 0), B(2, 2), C(7, 7)$.

c. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente eccentricità $\frac{5}{4}$ e fuoco nel punto $(-5, 0)$.

d. Rappresenta nel piano cartesiano le seguenti rette e stabilisci se sono fra loro parallele o perpendicolari. Nel caso di perpendicolarità determinare il loro punto di intersezione.

$$r : y + 2x = 0;\ s : y + 2x - 3 = 0;\ t : 2x - y - 4 = 0$$

2 Esercizi Algebra

Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la corrispondente base di $\mathbb{R}^3$. Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= -h\mathbf{v}_1 + (h+1)\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) &= -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, e trovare le loro equazioni cartesiane.

2. Calcolare $f^{-1}(h\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{v}) = h\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare una base di autovettori per un determinato valore di h.
4. Studiare la diagonalizzabilità della matrice $M^{\mathcal{A}}(f)$ associata a f rispetto alla base $^{\mathcal{A}}$ di $\mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
5. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \\ g(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 \\ g(\mathbf{v}_3) &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Mostrare che per $h = 0$, l'applicazione $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è invertibile e calcolare una matrice associata all'applicazione inversa $(f \circ g)^{-1}$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale e Gestionale- CdL in Ingegneria per la Transizione ecologica

Prova in itinere di **Algebra lineare** - 10 dicembre 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

---

3 Esercizi Preliminari

a. Determina l'equazione della retta che passa per il punto $C(-1;2)$ e con il coefficiente angolare uguale a quello della retta che passa per i punti $A(2;2)$ e $B(1;-4)$.
b. Determina la misura del segmento che le rette di equazioni $y = x - 6$ e $y = -x + 5$ staccano sull'asse delle x.
c. Determinare le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(1;-5)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2$.
d. Trova l'equazione della circonferenza di raggio $2\sqrt{3}$ avente il centro nel punto in cui la retta di equazione $2x + 3y = 5$ interseca la bisettrice del I quadrante.

4 Esercizi Algebra

Siano $\mathbf{v}_1 = (3,-1,0), \mathbf{v}_2 = (0,2,2), \mathbf{v}_3 = (-1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ la corrispondente base di $\mathbb{R}^3$.
Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= (h-1)\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= (3,-3,-2) \\ f(\mathbf{v}_3) &= (-h,2h,2h), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $M^{\mathcal{A}}(f)$ e studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, e trovare le loro equazioni cartesiane.

2. Calcolare $f^{-1}(5-h,1,2)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

3. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Dato un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ avente come base $\mathcal{B} = [(3,1,2),(-1,2,2)]$ determinare il valore di h per cui f induce un endomorfismo $g : V \to V$. Infine determinare $M^{\mathcal{B}}(g)$.
5. Detta $\phi : W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$\phi(w_1) = (k, k+1, k, -1),$$

$$\phi(w_2) = (0,1,2,3),$$

verificare che ϕ è iniettiva per ogni valore del parametro reale k.