CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 25 Gennaio 2025

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,-1,0) &= (0,1,1-3h) \\ f(0,1,0,0) &= (1-h,h,h) \\ f(0,-1,1,0) &= (h-1,-h,0) \\ f(-1,0,0,1) &= (1,0,2h) \end{aligned}$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Sia assegnata l'applicazione lineare $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla legge $p(x,y,z) = (x,y,z,0)$, detta
$$g = f \circ p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
determinare la matrice $M(g)$ rispetto alle basi canoniche.
3. Studiare g, determinando, in particolare, il nucleo e l'immagine, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Studiare la semplicità di g al variare di h.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta e il piano:
$$r: \begin{cases} x - 3y = 0 \\ y + z - 4 = 0. \end{cases}, \pi : x + 3z - 3 = 0$$
Determinare la retta s proiezione ortogonale di r sul piano π, e determinare $d(r,s)$.
2. . E' assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale '$O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 - 2xy - ky^2 + 4k = 0$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare l'iperbole del fascio avente asintoto parallelo alla retta di equazione x + y+5 = 0.
3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + y^2 + hxz - hyz + z^2 + x + y = 0.$$

Esercizi Preliminari

- Esercizio n.1

  a. Determina per quali valori del parametro k la distanza tra i punti $A(3k-1;-1)$ e $B(4;3k)$ è uguale a $3\sqrt{2}$.
  b. Stabilisci quali delle seguenti rette sono parallele o perpendicolari e darne una rappresentazione grafica:
  $$r : y = 4x + 1,\ s : 8x - 2y + 5 = 0,\ y = -\frac{1}{4}x,\ u : y = -\frac{1}{4}$$

- Esercizio n.2

  a. Determinare l'equazione della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse y di vertice $V(-2;0)$ e passante per $P(0;4)$.
  b. Determinare l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo vertice.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 20 febbraio 2025

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con:

$$f(x,y,z) = (x + 2hy - z, (h+1)y + hz, (1-h)z), \; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Studiare f , determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Determinare $f^{-1}(1,0,-1)$.
3. Studiare la semplicità di f al variare di h.
4. Dato il sottospazio vettoriale $V = \mathcal{L}((1,1,0),(0,1,0))$, si consideri la restrizione di f a V. Dimostrare che la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g : V \to V$, per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre determinare la matrice di tale endomorfismo rispetto a una base di V.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati le rette r ed s:

$$r : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

   e il punto $P(1,0,0)$. Calcolare il punto simmetrico di P rispetto alla retta r. Mostrare che le rette r e s non sono sghembe e determinare il piano che le contiene.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, , u$. Determinare e studiare il fascio φ delle coniche che sono tangenti alle rette

$$r : 2x + y - 1 = 0; \; s : x - y + 1 = z = 0 \tag{1}$$

   nei punti in cui esse incontrano l'asse x. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3. Sia:

$$\Gamma : x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0, \quad z = 0.$$

   Determinare e studiare la quadrica contenente Γ, passante per i punti $A(-2,0,1)$, $B(0,-2,0)$ e il punto $C = (1,1,-1)$.

Esercizi Preliminari

- Esercizio n.1 Verifica che il triangolo di vertici $A(2,1)$, $B(7,6)$, $C(-1,9)$ è isoscele e calcolane l'area
- Esercizio n.2
- Esercizio n.3 Calcola la distanza del punto $A(-2;1)$ dalla retta con equazione $3x - 4y - 1 = 0$. Determina l'equazione della retta passante per A e ortogonale alla retta r.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 16 aprile 2025

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

È assegnato $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & h & 2 \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R}.$$

1. Studiare h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Diagonalizzare $M(f)$, se possibile, nei casi $h = 1$ e $h = 5$.
3. Sono dati $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}$ e $W = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 2))$. Calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione, e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) = W$.
4. È dato $U = \mathscr{L}((1, 1, 1), (0, 1, 2)) \subset \mathbb{R}^3$. Studiare la semplicità di $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $U = V_2$ e $(0, 0, 1) \in \operatorname{Ker} g$, determinando, se possibile, una base di autovettori per g.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i piani $\pi_1: x - y + 2z + 1 = 0$ e $\pi_2: 2x + y + 3z - 1 = 0$ e le rette:
$$r_1: \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} y + h = 0 \\ x - z - h = 0, \end{cases}$$
con $h \in \mathbb{R}$. Determinare la retta r parallela ai piani π_1 e π_2 e passante per O. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale le rette r_1 e r_2 sono complanari e, per tale valore di h, determinare il piano α che le contiene.
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti all'asse $\vec{x}$ nell'origine e passanti per i punti $A = (1, 1)$ e $B = (0, 2)$. Determinare la natura della conica del fascio passante per $P_\infty = (1, 2, 0)$.
3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare la natura delle quadriche
$$x^2 + 2y^2 + 2kxz + 4ky + 2kz + 1 = 0$$

- **Preliminari.** Esercizio n.1 Verifica se il triangolo di vertici $A(2, 1)$, $B(7, 6)$, $C(-1, 9)$ è isoscele. Calcola l'area.
- **Preliminari.**Esercizio n. 2 Scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y, vertice nell'origine e che passa per il punto $A(1, 4)$. Dopo averne determinato il fuoco e l'equazione della direttrice, rappresenta graficamente la parabola.
- **Preliminari.**Esercizio n.3 Determina se le seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze e, in caso affermativo, rappresentale nel piano cartesiano.

   a. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
   b. $x^2 + y^2 + 4xy - 8 = 0$
   c. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 3y + 1 = 0$

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 23 giugno 2025

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (0,0,h+1)\\ f(0,1,-1) &= (0,1-h,h-1)\\ f(0,0,1) &= (1,h,1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. Studiare la semplicità di f nei casi $h = 2$ e $h = 3$, determinando in ciascun caso gli autospazi e, se possibile, una base di autovettori per f.

3. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ gli spazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - ht = 0\}$ e $W = \mathscr{L}((1,1,0,h-1),(0,0,1,1))$, al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcolare $V + W$ e $V \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando in ciascun caso se la somma è diretta o meno.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati la retta r di equazioni:
$$\begin{cases} x - y + z = 0\\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$$
il piano $\pi\colon\ y + z = 0$. Determinare la retta s proiezione ortogonale di r su π e il piano parallelo a r, ortogonale a π e passante per O.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alla retta di equazione $x - y = 0$ nel punto $A = (1,1)$ e all'asse $\vec{y}$ nel punto $B = (0,2)$. Determinare la natura della conica del fascio passante per $P_\infty = (1,2,0)$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2hxz + hy^2 + z^2 + 2y - 1 = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Preliminari.
1.Disegna l'ellisse, individuando le coordinate dei suoi fuochi.

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

2. Disegna l'iperbole e determina le equazioni dei suoi asintoti.

$$4x^2 - 25y^2 = 100$$