CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 23 Gennaio 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

---

1 Esercizi Preliminari

a. Trovare la retta tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ e passante per il punto $P(0,5)$.

b. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo avente come vertici i punti $A(6,0), B(2,2), C(7,7)$.

2 Esercizi Algebra

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (h+1, h+1, 1, 2h+1) \\ f(0,1,1,0) &= (h,0,0,1) \\ f(0,1,0,1) &= (1,0,0,h) \\ f(1,0,2,2) &= (2h+2, 4h+1, 1, 3h+2) \end{aligned}$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso Ker f e Im f e le loro equazioni cartesiane.
3. Nel caso $h = 1$ verificare che $\mathbb{R}^4 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
4. Posto $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y = z\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale f induce un endomorfismo $f' : V \to V$ e studiare la semplicità di f'.

3 Esercizi Geometria

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}$.

1. Determinare le equazioni della retta t passante per $P = (1,2,-1)$, ortogonale ed incidente la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

2. Studiare il fascio Γ di coniche di equazioni: $z = 0, \quad 3x^2 - kxy + 2ky - 4k = 0$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.
3. Detta Γ la conica del fascio ϕ passante per il punto $Q = (-2,1,0)$, determinare il centro di simmetria e una forma canonica di Γ.
4. Determinare le quadriche contenenti la conica $C : xy + 3x + 3y + 7 = 0$, passanti per i punti $A = (-1,1,1)$, $B = (0,1,1)$ e tangenti in B alla retta $s : t = y - z = 0$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 20 Febbraio 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dall'assegnazione:

$$f(x,y,z) = (x+hy+z, 2x+y+z, -x+y+hz, -hx+hy+z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare $f^{-1}(0,1,0,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Studiare $\phi = g \circ f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x-y+3z+4=0 \\ x+y+4z-4=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 3x+y+4z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

   e il punto $P = (1,-1,1)$. Determinare la retta t ortogonale alle due rette r e s e passante per P e calcolare la distanza $d(P,r)$.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (1,0)$ e $B = (-1,1)$ e tangenti in $C = (2,1)$ alla retta di equazione $x = 2$. Determinare una forma canonica della conica del fascio passante per $P_\infty = (1,-1,0)$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + hz^2 + 2y - 1 = 0,$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizi Preliminari

a. Scrivi l'equazione dell'asse del segmento i cui estremi sono $A(1;2)$ e $B(7;8)$

b. Determina perimetro del rettangolo inscritto nell'ellisse di equazione $4x^2 + 25y^2 = 100$ avente due vertici sulla retta di equazione $y = \frac{6}{5}$

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 24 aprile 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

Sono dati la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$, e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $M(f) = A + {}^{t}A$.

1. Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Diagonalizzare, se possibile, la matrice A nei casi $h = 0$ e $h = 1$.
3. È dato il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f(V)$, determinandone in ciascun caso la dimensione e le equazioni cartesiane.
4. È data la restrizione $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^4$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale esiste l'estensione $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di $f|_V$ tale che $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0,\ z = 0\}$ è autospazio per φ. Determinare la matrice $M(\varphi)$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati i punti $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (-1, 1, 1)$. Determinare il piano π contenente A, B e C. Data la retta $r\colon x - y + 1 = y - z = 0$, determinare la retta s simmetrica di r rispetto al piano $\alpha\colon x + z = 0$.
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + y^2 - h - 1 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.
3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare il cono e il cilindro aventi vertici, rispettivamente, $V = (0, 1, 1)$ e $V' = (1, 2, 1, 0)$ e contenenti la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} xy - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
Stabilire la natura del cilindro.

Esercizi Preliminari

a. Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $O(0;0)$ e $A(\frac{3}{4};1)$. Calcola le distanze di questi punti dalla retta r' di equazione $4x - 3y + 2 = 0$. Come sono tra loro le rette r e r'?
b. Nel triangolo di vertici $A(1;2), B(-1;-1), C(5;1)$ determina le lunghezze delle mediane.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 19 giugno 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.
E' assegnata l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2-h, -h, 0) \\ f(v_2) &= (1, 0, h) \\ f(v_3) &= (-1, -1, h-1) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare $M(f)$. Studiare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f, determinando $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Mostrare che per ogni valore di h la somma di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ è diretta e calcolare $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
3. Verificare che sono autovalori per f i valori $T = 1$ e $T = h$ e studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 0)$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati la retta r, un piano π, e un punto P

$$r : \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi : \ 2y - 2z + 5 = 0; \ P = (1, 2, 0),$$

   determinare la retta s ortogonale a π e passante per P. Mostrare che r e s sono sghembe.

2. Sul piano $z = 0$ si studi il fascio di coniche tangenti alla retta $x - 2y = 0$ nel punto $O = (0, 0)$ e alla retta $x + 2y + 1 = 0$ nel punto $A = (-1, 0)$. Determinare l'equazione canonica dell'iperbole equilatera del fascio.
3. E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$kx^2 - y^2 - 2kyz + 2x - 2z = 0.$$

Quesiti solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

- Determinare l'equazione dell'ellisse circoscritta al rettangolo di vertici $(-8, 4)$, $(8, 4)$, $(8, -4)$, $(-8, -4)$.
- Scrivi l'equazione della circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 2. Determina le equazioni delle due rette tangenti alla circonferenza nei due punti di ascissa zero appartenenti a Γ.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 8 Luglio 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dall'assegnazione:

$$f(x,y,z) = ((2-h)x - y - z, x - y - hz, -x + hy + hz) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Studiare la semplicità nel caso $h = 1$, determinando se è possibile una base di autovettori.
3. Calcolare $f^{-1}(1,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Studiare $\phi = g \circ f$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

   e il punto $P = (1,-1,1)$. Verificare se le due rette sono sghembe e determinare la retta t ortogonale alle due rette r e s e passante per P.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (0,1)$ e $B = (1,-1)$ e tangenti in $C = (1,2)$ alla retta di equazione $y - 2 = 0$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare le quadriche di equazione:

$$kx^2 + y^2 + 2xz + 2yz + kz^2 = 0,$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizi Preliminari

a. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(0;3)$ e passante per $P(2;-1)$.

b. Trova per quali valori di k il punto $P(k+2;k+1)$ è equidistante dai punti $A(-2;1)$ e $B(4;-2)$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** - 23 Settembre 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È consentito l'utilizzo della calcolatrice e di un foglio A4, fronte e retro come formulario.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

È assegnato $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x,y,z) = ((4-h)x + hy + hz, (h-1)x + hy, (1-h)x + hz)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Diagonalizzare $M(f)$, se possibile, nei casi $h = 1$ e $h = 2$.
3. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,1,h)$, $v_2 = (1,h,1,1)$ e $v_3 = (h,1,1,1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, ed è dato $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.
   - Determinare le equazioni cartesiane di V per ogni $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione;
   - determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\mathcal{A} = [v_1, v_2, e_3]$ è una base di V;
   - per il valore di h determinato nel punto precedente, completare $\{v_1, v_2, e_3\}$ per ottenere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e calcolare $[v_3]_{\mathcal{A}}$ e $[v_3]_{\mathcal{B}}$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. È data la retta:

   $$r\colon \begin{cases} x - 3y + 14 = 0 \\ 2y + z - 14 = 0. \end{cases}$$

   Determinare il piano π passante per O e ortogonale a r. Dato $A = (1,2,1)$, determinare la retta t passante per A e parallela ai piani $\alpha\colon 2x - y + z - 2 = 0$ e $\beta\colon x - 3y + 2z = 0$.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

   $$2x^2 - (h+3)xy + y^2 + (h-1)x - 1 = 0,$$

   determinandone, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Determinare l'iperbole avente un asintoto parallelo alla retta $x + y = 0$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

   $$x^2 + 2hy^2 - 2hyz + z^2 + 2hy + 1 = 0.$$

Esercizi Preliminari

a. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, disegnare il suo grafico e determinare le coordinate dei suoi vertici.

b. Determinare, qualora sia possibile il coefficiente angolare delle rette AB, CD conoscendo le coordinate dei punti $A = (4,3), B = (2,3), C = (-3,-2), (-3,-1)$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova Scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 22 novembre 2024

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Ogni pagina del foglio a quadretti deve essere numerata.
È obbligatorio svolgere correttamente almeno un quesito sui preliminari per coloro che non hanno superato il test ad ottobre.

I

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base $\mathcal{A} = [(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)]$:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Dato il sottospazio:
$$V = \mathcal{L}((1,0,1),(2,0,3))$$
determinare le sue equazioni cartesiane, e $f(V)$ al variare di h, specificandone, in ciascun caso, la dimensione.
4. Determinare i casi in cui f è invertibile e in tali casi determinare l'applicazione inversa f^{-1}.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

1. Data la retta:
$$r : \begin{cases} x+z-1=0, \\ y = 2x+4z-4, \end{cases}$$
e dato il punto $P = (-1,3,0)$, si richiede di determinare la retta ortogonale e incidente r e passante per P. Determinare la distanza del punto P dalla retta r.
2. Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ di equazione:
$$2x^2 + (h-3)xy + y^2 + (1-h)x - 1 = 0,$$
determinando in particolare i punti base del fascio e le coniche spezzate.
3. Studiare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + z^2 - 1 = 0.$$

Quesiti solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y}$.

1. Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione:
$$y - 3x + 2 = 0,$$
e passante per il punto $(3,1)$.
2. Trova poi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, avente vertice nel punto di intersezione delle due rette perpendicolari e passante per l'origine degli assi cartesiani.
3. Verifica, infine, che la retta di equazione:
$$y = \frac{28}{3}x + 10$$
è tangente alla parabola nel suo punto di ascissa -3.