

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Gennaio 2022

Durata della prova: 90 minuti.

I

Siano $e_1 = (1, 0, 0)$, $v_1 = (0, -1, -1)$ e $v_2 = (-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$. E' assegnata l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f(e_1) = (1, 2, h) \\ f(v_1) = (h+2, 2, 3h+2) \\ f(v_2) = (h+1, -1, h+2) \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- 1) Studiare la semplicità di f nei casi $h = -1$ e $h = -3$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f .
- 2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1, 1, 0)$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Dati la retta r , il piano π e il punto P :

$$r: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}, \pi: x + 3y + 4 = 0, P = (1, 1, 0)$$

Determinare le equazioni della retta u perpendicolare ad r , parallela a π e passante per P , e calcolare la distanza di u da π . Calcolare infine l'angolo che la retta r forma con l'asse $\vec{z}$.

- 2) Sul piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche di equazione

$$x^2 + hy^2 - 2xy + 2x - 2hy + 1 = 0$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare una forma canonica dell'iperbole equilatera presente nel fascio.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Febbraio 2022

Durata della prova: 90 minuti.

I

Sia assegnato W sottospazio di $\mathbb{R}^4$, avente come base $\mathcal{A} = [w_1, w_2, w_3]$ con $w_1 = (0, 1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 0, 3, 0)$, $w_3 = (0, 0, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$. E' assegnato l'endomorfismo $f: W \rightarrow W$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f(w_1) = w_1 \\ f(w_2) = hw_1 - w_2 \\ f(w_3) = -hw_2 + (h+1)w_3 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

- 1) Studiare f , al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- 2) Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice $M^{\mathcal{A}, \mathcal{A}}(f)$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Sono assegnate le rette r_1 ed r_2

$$r_1: \begin{cases} x - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_2: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Determinare le equazioni della retta t incidente e ortogonale ad r_1 ed r_2 .

- 2) Sul piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio ϕ di coniche che passano per l'origine, hanno come tangenti nell'origine l'asse $\vec{y}$ e passano per i punti $(1, -1)$ e $(1, 2)$. Determinare il punto improprio ed una equazione canonica della parabola del fascio ϕ .

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria- 27 aprile 2022

Durata della prova: 120 minuti.

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, -1)$ di $\mathbb{R}^4$.
Dato $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$, si consideri l'endomorfismo

$$f : V \rightarrow V$$

mediante le immagini

$$\begin{cases} f(v_1) &= (h, 0, 0, 1) \\ f(v_2) &= (1, 0, h, 0) \\ f(v_3) &= (0, 0, 0, -2) \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando le equazioni cartesiane di $\text{Im } f$ e di $\text{Ker } f$.

2. Si consideri l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

con la legge

$$f(x, y, z) = ((-1 - h)x + hy + (h + 1)z, -x + z, -hx + hy + hz)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare $M(f)$, la matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e studiare la semplicità di f nel caso $h = 1$ determinando se possibile una base di autovettori.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Determinare le equazioni della retta t passante per $A = (2, 1, 1)$ e parallela ai piani $\pi_1 : x - y - 2z - 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z - 2 = 0$ e determinare la distanza di $B = (0, 0, 5)$ dalla retta t .

2. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hx^2 - y^2 - hz^2 + 4xz - 2yz + 1 = 0$$

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Giugno 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(-1, 0, 0) = (-1, -2, 0) \\ f(1, 0, -1) = (0, 1, -2) \\ f(1, 1, 0) = (h+1, h+1, h) \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando le equazioni cartesiane di $\text{Im } f$ e di $\text{Ker } f$.
2. Studiare la semplicità di f e determinare, quando possibile, una base di autovettori.
3. Dato il sottospazio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

calcolare $f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$, verificare che $f(V) \subseteq V$ e dire in quali casi si ha l'uguaglianza.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$.

1. Date le rette:

$$r : \begin{cases} 2y = z \\ x = -1 \end{cases}, s : \begin{cases} y = -2z \\ x = 1 \end{cases}$$

verificare che sono sghembe, determinare l'angolo α individuato dalle due rette r ed s e individuare la retta t ortogonale ed incidente con r ed s .

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $r : x - y - 1 = 0$ nel punto $A = (1, 0)$ e alla retta $s : x - 2y = 0$ nell'origine $O = (0, 0)$.
3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2hxy + 2xz + 2hx + 6z + 2z^2 = 0$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- la retta r passante per il punto $A(1, 2)$ e per il punto $B = (3, 2)$
- il punto di intersezione V tra la retta r e l'asse $\vec{y}$ e l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$ avente vertice V e passante per il punto $B = (1, 3)$.
- l'equazione della retta tangente alla parabola passante per il punto $B = (1, 3)$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Giugno 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(1, 1, 0, 0) = (h + 2, h + 1, h + 3, 0) \\ f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1) \\ f(0, 0, 1, 1) = (1, 2, 0, 1) \\ f(0, 1, 1, 0) = (h + 2, h + 2, h + 1, 0) \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
2. Determinare, al variare di h , la controimmagine

$$f^{-1}(1, 0, 0, -1) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = (1, 0, 0, -1)\}$$

3. Dato il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$ verificare che l'endomorfismo f ristretto a V , $f|_V$, induce $\forall h \in \mathbb{R}$ un endomorfismo $g : V \rightarrow V$. Studiare la semplicità di g per $h = -1$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dato il punto $A = (2, 0, 0)$ e il piano $\pi : x + y - 3z + 2 = 0$, determinare il simmetrico del punto A rispetto al piano π .
2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio ϕ di coniche che ha punti base $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 3)$, $D = (4, 3)$.
3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$xy + kxz - kyz - z = 0.$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- la retta r passante per il punto $A(1, 2)$ e per il punto $B = (3, 2)$
- il punto di intersezione V tra la retta r e l'asse $\vec{y}$ e l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$ avente vertice V e passante per il punto $B = (1, 3)$.
- l'equazione della retta tangente alla parabola passante per il punto $B = (1, 3)$.

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definito dalle condizioni:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & h+2 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
2. Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0, y - z - t = 0\}$, calcolare $f(W)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, la dimensione.
3. Studiare la semplicità di f per $h = -2$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati i punti $A = (2, 0, 2)$ e $Q = (-2, 0, 2)$ e il piano $\alpha : x + y - z + 3 = 0$, determinare il piano π contenente A e B e ortogonale ad α .
2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio ϕ di coniche di equazione:

$$hx^2 + y^2 + 2xy + 2(h-3)x + 1 = 0$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$2x^2 + 2xy + ky^2 + z^2 + 2kx - 2kz = 0.$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- il punto di intersezione C tra la retta r passante per il punto $A(1, 2)$ e per il punto $B = (1, -2)$ e l'asse $\vec{x}$ e l'equazione della circonferenza avente centro C e raggio 2.
- l'equazione della retta tangente alla circonferenza passante per il punto A .

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito dalle condizioni:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ indicando le loro equazioni cartesiane.
2. Dato $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$, calcolare $f(Z)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, e calcolare $Z \cap f(Z)$.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f .

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dato un punto $A = (2, 2, 2)$ determinare il suo simmetrico A' rispetto al piano $\pi : x + y + z + 3 = 0$. Determinare l'equazione del piano α passante per questi due punti, A' ed $B = (1, 0, 0)$, ed ortogonale a π .
2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio ϕ di coniche di equazione:

$$hx^2 + hy^2 - 2xy - h = 0$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Detta $\mathcal{C}$ la circonferenza del fascio, determinarne centro e raggio.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2y^2 + 2hxz + z^2 - 2hx - 1 = 0.$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- il punto di intersezione C tra la retta r passante per il punto $A(1, 2)$ e per il punto $B = (1, -2)$ e l'asse $\vec{x}$ e l'equazione della circonferenza avente centro C e raggio 2.
- l'equazione della retta tangente alla circonferenza passante per il punto A .

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Settembre 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definito dalle condizioni:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & h & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ indicando le loro equazioni cartesiane.
2. Determinare, al variare di h , la controimmagine

$$f^{-1}(0, 0, 1, -1) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = (0, 0, 1, -1)\}$$

3. Detta $p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione definita da $p(x, y, z, t) = (x, z, t)$, si consideri l'endomorfismo $\phi = p \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Studiare la semplicità di ϕ .

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dato un punto $A = (0, 0, 2)$ determinare il suo simmetrico rispetto al punto $B = (1, 2, -1)$, rispetto alla retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e rispetto al piano $\pi : x - y + z = 0$.
2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio ϕ di coniche di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2hxy - 1 = 0$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 - xy - hy - hz + h$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}$.

1) Calcolare il perimetro del triangolo avente vertici $A(5, 8), B(6, 4), C(3, 4)$.

2) Determinare se le seguenti rette, r ed s , sono parallele o ortogonali:

2.1) $r : x = 0, s : y - 3 = 0$

2.2) $r : y = -x + 1, s : 2y + 2x + 5 = 0$

2.3) $r : x + 3y - 3 = 0, s : 3x - y + 5 = 0$

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 19 Settembre 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(1,0,1) = (1,-h,0) \\ f(1,0,0) = (0,0,h) \\ V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=z=0\} \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando le equazioni cartesiane di $\text{Im } f$ e di $\text{Ker } f$.
2. Nel caso $h = 0$ studiare la diagonalizzabilità della matrice $M(f)$.
3. Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(1, -1, 0)$

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Siano dati la seguente retta r

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

e il seguente piano $\pi : 2x - 3z - 7 = 0$. Verificare che r è parallela a π e calcolarne la distanza tra essi.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti in $A = (-1, 1)$ alla retta $r : x + y = 0$ e passanti per $B = (1, 0)$ e $C = (-1, 2)$. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.
3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$kx^2 - 4xz + y^2 - z^2 - k = 0$$

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- disegnare la retta di equazione $y = 2x + 2$.
- determinare l'equazione della retta passante per il punto $P(-2, -3)$ e parallela alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x + 5$
- determinare l'equazione della retta passante per il punto $P(-2, -3)$ e ortodigonale alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 3$

CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 24 novembre 2022

Durata della prova: tre ore.

I

E' assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(1, 1, 0) = (h + 2, h + 1, h + 3) \\ f(e_2) = (0, 0, 0) \\ f(0, 1, 1) = (0, 2, 0) \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro h l'applicazione lineare f , determinando $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Posta $\mathcal{B} = [(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)]$ una base di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Sono dati la retta r e il piano π

$$r : \begin{cases} 7y + z = 0 \\ x = 7 \end{cases}, \pi : x - z = 0$$

Determinare la retta r' simmetrica di r rispetto al piano π .

2. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$2hx^2 + y^2 - 2hx + 2hy - 1 = 0$$

determinandone, in particolare, la parabola del fascio ed il suo vertice V .

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione: $x^2 - 2hxy + 2hxz - 2z = 0$.

Quesito solo per gli studenti che non hanno ancora superato il test sui Preliminari

Determinare

- Verifica se sono perpendicolari le rette di equazione $y = 3x + 1$; $\frac{1}{3}x + y + 1 = 0$.
- Calcola la distanza dall'origine della seguente retta: $y = -3x + 5$.
- Determinare l'equazione della circonferenza che passa per $A(3, 1)$, $B(0, -2)$ e avente ascissa del centro in 2.