# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 16 Febbraio 2021

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h-2 & h-2 & 2h \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Verificare che per ogni valore di $h$ risulta $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$
2) Studiare la semplicità di $f$.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} z=0 \\ x+y+z=0, \end{cases}$$
verificare che esse sono sghembe. Determinare il piano $\pi$ contenente la retta $s$ e passante per $A = (1,-1,-1)$, e la retta $t$ passante per $A$ e ortogonale a $\pi$.
2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + ky^2 + z^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 9 Aprile 2021

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che:

$$\begin{cases} f(0,1,0) = (h,0,h) \\ f(1,0,1) = (1-h,1,1-h) \\ f(1,0,0) = (-1-h,-1,-h) \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2) Studiare la semplicità di $f$ nel caso $h = 1$ e determinare se possibile una base di autovettori.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinare il piano $\pi$ contenente la retta $r$ e passante per $A = (1,0,-1)$, e la retta $t$ passante per $A$ e ortogonale a $\pi$.

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 - ky^2 + 2kxy - 4 = 0.$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Studiare in modo completo l'iperbole equilatera e trovare una sua forma canonica.

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 18 Giugno 2021-turno I

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

### I

Siano $v_1 = (1,0,-1,0), v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,0,2) \in \mathbb{R}^4$ e sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$. E' assegnata l'applicazione lineare $f\colon V \to V$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f(v_1) = (h,0,-h,0) \\ f(v_2) = (0,1,0,1) \\ f(v_3) = (-1,-1,1,h) \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2) Determinare il valore di $h$ per cui $f$ ammette gli autovalori 2 e 3. Per $h = 3$ studiare la semplicità e determinare se esiste una base di autovettori.

### II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r\colon \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}, s\colon \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Determinare le equazioni della retta $u$ che le interseca ed è ortogonale ad entrambe.

2) Sul piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche che passano per $A = (2,3)$, $B = (0,1)$ e $C = (2,2)$ e sono tangenti in $C$ alla retta $x - y = 0$.

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 18 Giugno 2021-turno II

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

E' dato l'endomorfismo
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
mediante le assegnazioni
$$\begin{cases} f(-1,0,0) & = (-1-h, 0, -h) \\ f(1,0,1) & = (-h+1, 0, 3h) \\ f(0,1,-1) & = (3h+2, -1, 3h) \end{cases}$$
con $h$ parametro reale.

1) Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2) Calcolare, al variare di $h$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,1)$.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il punto $A = (1,1,1)$ e la retta
$$r : \begin{cases} x - y - 1 & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$
determinare la retta $s$ ortogonale e incidente la retta $r$ e passante per $A$. Determinare $d(A, r)$.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$(h-1)x^2 + y^2 - 2xy - 2(h-1)x + 2y + 1 = 0$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare una forma canonica della conica ottenuta per h = 0.

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Luglio 2021-turno I

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

Sono assegnati i vettori $v_1 = (-1,-1,1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (2,0,0)$ di $\mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

mediante le immagini

$$\begin{cases} f(v_1) & = hv_1 + hv_3 \\ f(v_2) & = v_2 + v_3 \\ f(v_3) & = hv_1 - hv_3 \end{cases}, \ h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2. Sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_3)$, determinare $f(V)$ al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$. Detto $g : V \to V$ l'endomorfismo indotto da $f$, studiare la semplicità di $g$ al variare di $h$.

**II**

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati il punto $O = (0,0,0)$ e la retta:

$$r : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

determinare:
(a) il piano $\pi$ passante per $O$ e ortogonale alla retta $r$;
(b) il punto $O'$ simmetrico di $O$ rispetto a $r$

2. Determinare la natura della quadrica contenente le coniche:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} z = 0 \\ y^2 - x^2 + 2y = 0 \end{cases} ,\Gamma_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z^2 - x^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

e il punto $A = (1,1,1)$.

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Luglio 2021-turno II

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

## I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (-1, -1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 2, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^4$.
Dato $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$, si consideri l'endomorfismo

$$f : V \to V$$

mediante le immagini

$$\begin{cases} f(v_1) & = (2-h, h, 0, 0) \\ f(v_2) & = (1, h, h, 0) \\ f(v_3) & = (0, -2, 0, 0) \end{cases} \quad , \; h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2. Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = t = 0\}$ determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f|W$ induce un endomorfismo $g : W \to W$. Studiare la semplicità di $g$ determinando, se possibile, una base di autovettori per $g$.

## II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Determinare le equazioni della retta $r$ passante per $A = (1, 1, 2)$ e parallela ai piani $\pi_1 : x + 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 2z - 2 = 0$ e determinare la distanza di $B = (0, 5, 0)$ dalla retta $r$.

2. Assegnata la conica $\Gamma$ del piano $z = 0$ di equazioni:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

determinarne un'equazione canonica, il centro di simmetria e gli assi di simmetria.

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 2 Settembre 2021

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che:

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (2h,0,h) \\ f(1,0,1) = (h-1,1,0) \\ f(1,-1,0) = (-2,2,-h) \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Dato $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0\}$, determinare il valore di $h$ per cui la restrizione $f|W$ induce un endomorfismo $g : W \to W$. Studiare la semplicità di $g$, determinandone, se possibile, una base di autovettori.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i piani $\alpha : x - y + z + 3 = 0$ e $\beta : 2x + y = 0$ e il punto $P = (0,1,0)$, determinare il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $\alpha$. Determinare la retta $r$ passante per $P$ e parallela $\alpha$ e $\beta$

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $y - 2x = 0$ nel punto $A = (2,4)$ e tangenti alla retta $x + y - 1 = 0$ nel punto $B = (2,-1)$. Determinare il centro e i punti impropri dell'iperbole equilatera.

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Settembre 2021

---

*Durata della prova: 90 minuti.*

---

**I**

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(0,1,1) = (2-h, h, 0) \\ V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x = y = 0\} \\ f(1,-1,0) = (0,0,0) \end{cases} \quad , \; h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \, x-y+z-t = 0, x-t = 0\}$ e $W = \mathcal{L}((1,0,1,h),(h-1,0,1,2))$ Calcolare $V+W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

**II**

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Dati i punti $A = (1,0,3), B = (0,1,1), C = (-1,2,1)$, determinare il piano $\alpha$ che li contiene. Data la retta
$$r : \begin{cases} x = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$
determinare la retta simmetrica di r rispetto a $\alpha$.

2. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2xy - 4xz + hy^2 - hz^2 - 1 = 0$$

# CdL in Ingegneria Civile, Ambientale Gestionale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Novembre 2021

---

*Durata della prova: due ore.*

---

**I**

E' assegnato l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(1,1,0,0) = (-2,-h,2-h,0) \\ e_3 = (0,0,1,0) \in \operatorname{Ker} f \\ f(0,-1,-1,0) = (h,h,h,0) \\ f(0,0,0,1) = (h,-h,-h,0) \end{cases} \quad , \; h \in \mathbb{R}$$

1. Studiare al variare del parametro $h$ l'applicazione lineare $f$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2. Sia $W = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,-1,-1,0),(1,1,0,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Verificare che $f$ induce un endomorfismo $g : W \to W$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$ e studiare la semplicità di $g$ per $h = 1$.

**II**

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}u$.

1. Date le rette
$$r : \begin{cases} z = 2y \\ x = -1 \end{cases} \quad , s : \begin{cases} y = -2z \\ x = 1 \end{cases}$$
determinare la retta $t$ ortogonale ed incidente con $r$ ed $s$.Verificare che queste tre rette sono mutuamente ortogonali.

2. Studiare la famiglia di quadriche di equazione
$$x^2 - y^2 - 2hxz - 2yz - 2hz = 0$$
con $h$ parametro reale.