Corso Zero
Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

September 19, 2022

Esponenziali

Teoria in sintesi
Ricordiamo le seguenti formule:
Preso un numero intero positivo n avremo che

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esempio: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$
Ricordiamo inoltre che una potenza con esponente frazionario è uguale in simboli

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

Esempio: $\sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$
$12^{\frac{5}{2}} = \sqrt{12^{-5}} = \sqrt{\frac{1}{12^5}}$

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- Se la base è positiva, cioè $a > 0$, invece l'esponente è un numero reale sia positivo che negativo $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Se la base è nulla, cioè $a = 0$, l'esponente per tutti i numeri reali positivi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se la base è negativa, $(-a)^x$, allora l'esponente deve essere un numero intero relativo, $\forall x \in \mathbb{Z}$
- Se la base è uno, $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Esempi:

1) $2^x \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
2) $0^x \rightarrow \forall x > 0$. Questo perchè? Se avessimo $0^{-2} = \frac{1}{0^2} \rightarrow$ impossibile
3) $(-2)^x \rightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$. Questo perchè ? $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)^1}$ assurdo

Le equazioni esponenziali
Si chiamano equazioni esponenziali tutte le equazioni che contengono un valore incognito all'esponente. Le più semplici in cui ci si può imbattere sono dette elementari e si presentano nella forma:

$$a^x = b$$

con $a > 0, a \neq 1$.
Quante soluzioni ha questa equazione? Poiché a^x è un numero sempre positivo, l'equazione risulterà impossibile se $b \leq 0$. L'equazione ha invece un'unica soluzione con $b > 0$. Per risolvere le equazioni elementari vanno ricordate e applicate le proprietà delle potenze e la definizione di logaritmo.

Se $a > 0$, avremo quindi

$$a^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio:
Vediamo il segno di 2^x :
supponiamo $x = 3 \rightarrow 2^3 = 8 > 0$
supponiamo $x = -2 \rightarrow 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > 0$

Equazioni esponenziali: Sia $a > 0$, consideriamo l'equazione

$$a^x = b$$

Per equilibrare l'equazione, b come deve essere?

$$b > 0$$

Poichè il I membro sempre positivo , II lo deve essere pure.
Esempio n.1:
Risolvere la seguente equazione esponenziale:
$4^{x+1} = -2$
E' chiaro che è IMPOSSIBILE.
Esempio n.2:
$4^{x+1} = 2 \rightarrow 2^{2(x+1)} = 2^1 \rightarrow$ si uguagliano gli esponenti
$2(x+1) = 1 \rightarrow 2x + 2 = 1 \rightarrow 2x = 1 - 2 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze

Per ogni opportuna scelta dei numeri reali a, b, c, valgono le seguenti proprietà:

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$a^b \cdot c^b = (a \cdot c)^b$

Da queste proprietà si possono dedurre le seguenti:

$a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

$a^b : c^b = (a : c)^b$

o equivalentemente $\frac{a^b}{c^b} = \left(\frac{a}{c}\right)^b$

$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$ (proprietà della potenza di una potenza).

Alcune definizioni

Definizioni

Consideriamo un numero reale $a > 0$

Se eleviamo a alla zero, otteniamo 1, ovvero:

$$a^0 = 1$$

Preso un numero intero positivo, definiamo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Preso un numero razionale della forma $\frac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$ definiamo $a^{\frac{1}{q}}$ come quel numero che elevato a q dà come risultato a.

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

e chiameremo questo numero radice q-esima di a.

Come si procede se l'equazione esponenziale non è elementare?
I casi più frequenti sono tre e vengono illustrati in questo video tramite esempi ed esercizi svolti.
1) Nei due membri dell'equazione compaiono solo prodotti e quozienti di potenze con la stessa base.
Ci si può ricondurre a una forma del tipo

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

La soluzione si trova imponendo l'uguaglianza tra gli esponenti:

$$f(x) = g(x)$$

2) Compaiono esponenziali con due basi diverse ma stesso esponente. Applicando le proprietà delle potenze si può ridurre l'equazione a una forma del tipo $m \cdot a^{f(x)} = n \cdot b^{f(x)}$

Basta dividere e si ritrova un'equazione elementare $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{n}{m}$

Esempio:

$$15 \cdot 3^{2x+1} = 9 \cdot 5^{2x+1}$$

hanno lo stesso esponente

$\frac{3^{2x+1}}{5^{2x+1}} = \frac{9}{15} \to (\frac{3}{5})^{2x+1} = \frac{9}{15} \to \left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \frac{3}{5} \to 2x + 1 = 1 \to 2x = 0 \to$ $x = 0$

3) L'equazione contiene a^x e il suo quadrato a^{2x}. Tramite la sostituzione $t = a^x$ si può trasformare l'equazione in un'equazione di secondo grado nella variabile t; risolta questa, si riconduce la soluzione a un'equazione esponenziale elementare.

$$\lambda \cdot (a^x)^2 + \mu \cdot a^x + \delta = 0 \rightarrow \textit{pongo } a^x = t \rightarrow \lambda t^2 + \mu t + \delta = 0$$

e si risolve l'equazione di secondo grado in t.
Esempio

$$2^{2x} - 2^x - 2 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$$

pongo $2^x = t$ e l'equazione diventa:
$t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow \triangle = 1 + 8 = 9 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = 2, t_2 = -1$
Adesso t chi era?

$$t_1 = 2^{x_1} = 2^1 \rightarrow x_1 = 1$$

$$t_2 = 2^{x_2} = -1 \rightarrow \textit{impossibile}, \emptyset$$

Esercizi sulle equazioni esponenziali di base

Equazioni esponenziali risolubili mediante applicazione delle proprietà delle potenze:

- $8^{x^2-3x} = 1$ $[R : x = 0 \ o \ x = 3]$
- $7^{x^2+4x+3} = \frac{1}{7}$ $[R : x = -2]$
- $3^{3x} = \frac{1}{27}$ $R : [x = -1]$
- $\frac{7}{3}^{-2x} = \frac{9}{49}$ $[R : x = 1]$
- $2^x = -2$ $[R : \textit{impossibile}]$

Esercizi sulle equazioni esponenziali mediante variabile ausiliaria

Equazioni esponenziali risolubili mediante una variabile ausiliaria:

- $10^2x + 3 \cdot 10^x + \frac{5}{4} = 0$ $[R: \ \textit{impossibile}]$
- $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$ $[R: x = \frac{1}{4} \ o \ x = 0]$
- $16^x - \frac{3}{2}4^x + \frac{1}{2} = 0$ $[R: x = -\frac{1}{2} \ o \ x = 0]$
- $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$ $[R: x = 2]$
- $4^{x+8} = \frac{1}{4^{2x-5}}$ $[R: x = -1]$

Disequazioni esponenziali

La procedura per risolvere le disequazioni esponenziali è molto simile a quella usata per le equazioni esponenziali. Alla fine delle semplificazioni, quando va effettuato il passaggio agli esponenti, si possono presentare due casi:
1) Se $a > 1$ il verso della disequazione non cambia:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

In questo caso la funzione esponenziale è strettamente crescente, cioè è tanto più grande quanto più è grande il suo esponente.
2) Se $0 < a < 1$ il verso della disequazione cambia:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Esercizi sulle disequazioni esponenziali

- $3^x + \frac{1}{3 \cdot 3^x} > \frac{28}{9}$ $[R : x < -2 \; o \; x > 1]$
- $7 \cdot 49^x - 50 \cdot 7^x + 7 > 0$ $[R : x < -1 \; o \; x > 1]$
- $2^2 x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$ $[R : 0 < x < 2]$
- $2^{\frac{11}{2x+3}} > 32^{\frac{1}{2-x}}$ $[R : -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3} \; o \; x > 2]$
- $4^x + 2^{x+1} - 3 > 0$ $R : x > 0$
- $2^{\frac{2x+4}{x}} < (\frac{1}{4})^{-2}$ $[R : x < 0 \; o \; x > 2]$
- $\frac{5^x}{5^x - 1} + \frac{3}{5^x + 1} < -\frac{2}{1 - 5^2 x}$ $[R : \forall x \in \mathbb{R}]$
- $(\frac{1}{2})^{x+1} < 1$ $[R : x > -1]$
- $(\frac{1}{5})^{3x+2} > 1$ $[R : x < -\frac{2}{3}]$

Logaritmo

Si dice **logaritmo** in base a di b, e si scrive $x = \log_a(b)$?l'esponente x che si deve ad a (base) per ottenere b (argomento). Le due scritture $a^x = b$ e $x = \log_a(b)$?sono quindi equivalenti e i parametri devono soddisfare le condizioni già viste per la funzione esponenziale:
$b > 0, a > 0, a \neq 1$
Si dice funzione logaritmica una funzione che si presenta nella forma

$$y = \log_a(x)$$

dove la base a è un numero reale positivo diverso da 1. Tutte le funzioni logaritmiche sono definite solo per $x > 0$, il loro dominio cioè è l?intervallo $(0, +\infty)$
La funzione logaritmica in una determinata base è la funzione inversa della funzione esponenziale nella stessa base. I logaritmi godono di svariate proprietà, strettamente legate alle proprietà delle potenze, illustrate nella prossima lezione.

Proprietà dei logaritmi

I logaritmi godono di tre importanti proprietà, che derivano in modo immediato dalle proprietà delle potenze:
1) Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

2) Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza tra il logaritmo del numeratore e il logaritmo del denominatore

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

3) Il logaritmo della potenza di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

Formula del cambiamento base

Se si vuole stimare il valore di un logaritmo con la calcolatrice può essere molto utile la formula del cambiamento base:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Equazioni logaritmiche

Per essere risolte queste equazioni vanno semplificate con alcuni passaggi fino a quando non si presentano in una delle due forme seguenti:
1) Uguaglianza tra due logaritmi con la stessa base: si passa agli argomenti

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

2) Uguaglianza tra un logaritmo e un numero: si usa la definizione di logaritmo

$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a a^c \Leftrightarrow f(x) = a^c$$

Ricordiamo che un numero si può sempre pensare $\log_a a^c = c$

Esercizi sulle equazioni logaritmiche

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- $log_2(x-1) = 3$ $[R : x = 9]$
- $log(x-2) - log(x-1) = log5$ $[R : \emptyset]$
- $2 \cdot log_2 x = 2 + log_2(x+3)$ $[R : x = 6]$
- $log_3(x-1) = \frac{1}{2} log_3 x$ $[R : x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$
- $log(x-2) + log5 = logx$ $[R : x = \frac{5}{2}]$
- $log(x-1) - 2 \cdot log(x+1) - log8 = -2$ $[R : x = \frac{3}{2}, 9]$
- $3log_9 x + log_3 x = 10$ $[R : x = 81]$

Disequazioni logaritmiche

Il metodo per risolvere le disequazioni logaritmiche è simile a quello usato per le equazioni. Nell'ultimo passaggio, però, è importante fare attenzione alla base del logaritmo:

1) Se $a > 1$ il verso della disequazione non cambia

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\log_a f(x) > c \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^c \Leftrightarrow f(x) > a^c$$

2) Se $0 < a < 1$ il verso della disequazione cambia

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\log_a f(x) > c \Leftrightarrow f(x) < a^c$$

Esercizi sulle disequazioni logaritmiche ed esponenziali

Risolvere le seguenti disequazioni:

- $log_5 x < -10$ $[R : 0 < x < 5^{-10}]$
- $log_{\frac{1}{2}} x < 2$ $[R : x > \frac{1}{4}]$
- $log_3(x+4) \geq log_3(2x+3)$ $[R : -\frac{3}{2} < x \leq 1]$
- $log_2^2 x - 6log_2 x + 8 > 0$ $[R : 0 < x < 4$ o $x > 16]$
- $log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$ $[R : x > \frac{2}{3}]$
- $log_{10} x - 1 > \frac{2}{log_{10} x}$ $[R : \frac{1}{10} < x < 1; x > 100]$
- $log_3^2 x - 4log_3 x + 3 < 0$ $[R : 3 < x < 27]$
- $log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) \leq log_{\frac{1}{2}}(x+1) + log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ $[R : x > 2]$
- $\sqrt{log_{10} x} < 1$ $[R : 1 \leq x < 10]$

Risolvere le seguenti disequazioni:

- $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} > 1$ $[R : x > log_2 \frac{2}{7}]$
- $1 - 5^{x^2} \geq 0$ $[R : x = 0]$
- $(\frac{1}{5})^x - \frac{2}{5^{1-x}} > \frac{3}{5}$ $[R : x < 0]$
- $2^{x+7} + 4 > 0$ $[R : \forall x \in \mathbb{R}]$
- $\frac{2^x - 1}{8 - 2^x} > 0$ $[R : 0 < x < 3]$
- $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$ $[R : 1 < x < 3]$
- $(0.2)^{(x-1)^2} < (\frac{1}{5})^{2x+x^2}$ $[R : x < \frac{1}{4}]$