Corso Zero
Equazioni e disequazioni irrazionali

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

September 19, 2022

Le equazioni irrazionali
Una equazione si dice irrazionale quando nell'equazione è presente almeno un radicale il cui radicando contiene l'incognita.
Per esempio le equazioni

$$\sqrt{x+5} = 2x+1$$

$$\sqrt[3]{2x^2-6} = 2+x$$

$$\sqrt{x}+2 = \sqrt{2}$$

sono equazioni irrazionali poiché i loro radicandi contengono l'incognita.
Infatti sotto radice si hanno rispettivamente i polinomi $x+5, 2x^2-6, x$.

Equazioni irrazionali con radicali quadratici

Consideriamo un'equazione irrazionale del tipo

$$\sqrt{\mathrm{p(x)}} = \mathrm{q(x)}$$

Risolverla equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q^2(x) \end{cases}$$

La condizione di esistenza del radicale quadratico impone la prima disequazione del sistema, $p(x) \geq 0$. Inoltre, quando il radicale quadratico esiste, è positivo o nullo, per cui si ottiene la seconda condizione, $q(x) \geq 0$. Infine, poiché entrambi i membri dell'equazione sono positivi, si può elevare al quadrato e si ottiene la terza ed ultima condizione: $p(x) = q^2(x)$.

Esempio

Vediamo un esempio. Prendiamo l'equazione irrazionale $\sqrt{4-3x} = x$
Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 4-3x = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq 0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$$

Dalle prime due disequazioni si ottiene che $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$
Si risolve adesso l'equazione di secondo grado $x^2+3x-4=0$ e si ottengono le due soluzioni -4 e 1. Poiché dalle prime due disequazioni abbiamo ottenuto che $x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$, l'equazione irrazionale data ha come una unica soluzione 1.

Le equazioni irrazionali possono anche essere del tipo

$$\sqrt{\mathrm{p(x)}} = \sqrt{\mathrm{q(x)}}$$

Risolverla equivale a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q(x) \end{cases}$$

Le prime due disequazioni sono imposte dalla condizione di esistenza dei radicali quadratici, mentre la terza si ottiene elevando al quadrato l'equazione assegnata.
Ecco un esempio di questa tipologia. Prendiamo l?equazione irrazionale
$\sqrt{x-4} = \sqrt{2x+1}$
si impone il sistema

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-4 = 2x+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -5 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione irrazionale assegnata non ha soluzione.

Un altro tipo di equazione irrazionale è:

$$\sqrt{\mathrm{p(x)}} + \sqrt{\mathrm{q(x)}} = \sqrt{\mathrm{s(x)}}$$

Tale equazione equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ s(x) \geq 0 \\ p(x) + q(x) + 2\sqrt{p(x) \cdot q(x)} = s(x) \end{cases}$$

Si risolva, per esempio, l'equazione irrazionale $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x}$ Si impone il seguente sistema

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ x-3+x-1+2\sqrt{(x-3)(x-1)}=2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ 2x-4+2\sqrt{x^2-4x+3}=2x \end{cases}$$

Dalle prime tre disequazioni si ottiene $x \geq 3$ mentre l'equazione diventa $\sqrt{x^2-4x+3}=2.$ Possiamo elevare entrambi i membri al quadrato, dato che da entrambi i lati abbiamo quantità positive: si ottiene quindi $x^2-4x+3=4$ da cui $x^2-4x-1=0.$ Le radici di quest'equazione di secondo grado sono: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}.$. Dato che $x_1=2+\sqrt{5}\geq 3$ e che invece $x_2<3$, l'equazione irrazionale data ha un'unica soluzione: $x=2+\sqrt{5}$

Equazioni irrazionali con radicali cubici

Le equazioni con radicali cubici sono in generale molto più semplici da gestire, dato che non ci sono condizioni di esistenza da porre per il radicale visto che l'indice della radice è dispari.
Prendiamo dunque un'equazione del tipo

$$\sqrt[3]{p(x)} = q(x)$$

possiamo elevare direttamente al cubo, ritrovandoci a dover risolvere direttamente l'equazione

$$p(x) = q^3(x)$$

Facciamo un esempio: consideriamo l'equazione $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = x - 2$
Questa si risolve semplicemente elevando al cubo entrambi i membri: pertanto si ottiene $x^3 - 6x^2 = (x-2)^3$ che equivale a $x^3 - 6x^2 = x^3 - 8 - 6x^2 + 12x$. Dopo alcuni semplici conti, si nota che la soluzione dell'equazione assegnata è dunque $x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Le disequazioni irrazionali

Una disequazione si dice irrazionale quando in essa compare almeno un radicale il cui radicando contiene l'incognita. Per esempio, le disequazioni $\sqrt{2x-5} > 7$ e $\sqrt[5]{3x^2+1} < 3x$ sono disequazioni irrazionali poiché i loro radicandi contengono l'incognita: infatti sotto radice si hanno rispettivamente i polinomi. Invece, le disequazioni $\sqrt{2}x - 3 < 3x$ $x^3 < \sqrt[3]{5}$ non sono irrazionali, poiché i radicandi non contengono l'incognita. In questo testo ci limiteremo a studiare le disequazioni con radicali quadratici e cubici, dato che questa tipologia di disequazioni irrazionali rappresenta la stragrande maggioranza degli esercizi che si affrontano di solito.

Le disequazioni con radicali quadratici.

Le disequazioni con radicali quadratici si riducono a disequazioni del tipo

$\sqrt{P(x)} < Q(x) \qquad \sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

oppure

$\sqrt{P(x)} > Q(x) \qquad \sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

La suddivisione per tipologia che abbiamo appena fatto (cioè, raggruppare i casi $<$, $\leq$ e considerarli separatamente dai casi $>$, $\geq$) è giustificata dalle analogie e dalle differenze nel metodo di risoluzione che si deve applicare a seconda del verso della disequazione.

Primo caso: $\sqrt{P(x)} < Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} < Q(x)$$

La condizione di esistenza del radicale quadratico impone la prima disequazione del sistema: $P(x) \geq 0$.
Inoltre, quando il radicale $\sqrt{P(x)}$ esiste, esso è positivo o nullo, per cui si deve imporre una condizione aggiuntiva: $Q(x) > 0$.
Infine, poiché entrambi i membri della disequazione sono positivi, si può elevare al quadrato e si ottiene la terza ed ultima condizione: $P(x) < Q^2(x)$.
In sintesi, risolvere $\sqrt{P(x)} < Q(x)$ equivale a risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < Q^2(x) \end{cases}$.

Esempio

Per esempio, consideriamo la disequazione $\sqrt{5x-4} < x$. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 5x-4 \geq 0 \\ x > 0 \\ 5x-4 < x^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ x > 0 \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado $x^2-5x+4>0$ ha soluzioni $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \vee x > 4\}$(infatti l'equazione ad essa associata $x^2-5x+4=0$ ha soluzioni $x=1$ e $x=4$. Quindi si ottiene il seguente sistema: $\begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ x > 0 \\ x < 1 \vee x > 4 \end{cases}$

il cui insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{5} \leq x < 1 \vee x > 4\}$ che è quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata.

Secondo caso: $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

Analogamente al primo caso, risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$ equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq Q^2(x) \end{cases}$$

Esempio

Come esempio, consideriamo la disequazione $\sqrt{x+5} \leq 1 - x$
Il sistema associato è:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x+5 \leq (1-x)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

La disequazione $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ ammette come insieme di soluzioni: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 4\}$ (infatti la sua equazione associata $x^2 - 3x - 4 = 0$ ha come soluzioni $x = -1$ e $x = 4$). Quindi si ottiene il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 4 \end{cases}$$

Analogamente a quanto fatto prima, si deduce che la disequazione assegnata ammette come insieme di soluzioni: $\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq -1\}$

Terzo caso: $\sqrt{P(x)} > Q(x)$

La condizione di esistenza del radicale quadratico impone la prima condizione: $P(x) \geq 0$. Inoltre, quando il radicale $\sqrt{P(x)}$ esiste, è positivo o nullo. Possiamo distinguere due casi:
1) Quando $Q(x) < 0$ la disequazione è sempre vera, in quanto il membro a sinistra è sempre positivo ed è sempre maggiore del membro destro che è sempre negativo. Per cui quando il sistema $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$

è vero, anche la nostra disequazione sarà verificata.

2) Quando $Q(x) > 0$, entrambi i membri della disequazione sono positivi. Si può quindi elevare al quadrato, e si ottiene una terza (ed ultima) condizione: $P(x) > Q^2(x)$. Per cui quando il sistema

$$\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > Q^2(x) \end{cases}$$

è vero, anche la nostra disequazione sarà verificata. Notiamo che la disequazione $P(x) \geq 0$, nonostante debba comunque essere soddisfatta, è stata omessa, perché si può dedurre dal sistema. Infatti, dato che $Q^2(x) \geq 0$ per ogni polinomio $Q(x)$ dalla seconda disequazione (cioè $P(x) > Q^2(x)$) si deduce che necessariamente $P(x) \geq 0$.

In sintesi, risolvere

$$\sqrt{P(x)} > Q(x)$$

equivale a risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > Q^2(x) \end{cases}$$

Esempio

Per esempio, consideriamo la disequazione $\sqrt{4x+20} > x+2$
Dobbiamo risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} 4x+20 \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4x+20 > (x+2)^2 \end{cases}$$

Verificare quindi che
l?insieme delle soluzioni della disequazione assegnata è:
$\{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 4\}$

Quarto caso: $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

Analogamente al terzo caso, per risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$$

si risolvono i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq Q^2(x) \end{cases}$$

Le disequazioni con radicali cubici

Le disequazioni con radicali cubici sono del tipo

$$\sqrt[3]{P(x)} < Q(x), \sqrt[3]{P(x)} \leq Q(x), \sqrt[3]{P(x)} > Q(x), \sqrt[3]{P(x)} \geq Q(x)$$

In questo caso non si devono porre condizioni di esistenza e si può elevare direttamente al cubo risolvendo rispettivamente le seguenti disequazioni:

$$P(x) < Q^3(x) \qquad P(x) \leq Q^3(x) \qquad P(x) > Q^3(x) \qquad P(x) \geq Q^3(x)$$

Come esempio, consideriamo la disequazione $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} > x - 2$ Elevando al cubo, otteniamo $x^3 - 6x^2 > (x - 2)^3$ che equivale a $x^3 - 6x^2 > x^3 - 8 - 6x^2 + 12x$. Dopo alcune semplificazioni, otteniamo direttamente la soluzione $x < \frac{8}{12}$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

- $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = \frac{1}{2}$
- $\sqrt{3x+4} = 2 + x$
- $\sqrt[3]{x} = x$
- $\sqrt[4]{x+1} - x - 1 = 0$
- $\sqrt[3]{x^3 - 2} = 1 + x$
- $3 - 4x - \sqrt{x^2 - 1} = 4 - 3x$
- $\frac{4\sqrt{5x}+10}{\sqrt{5x}+1} = 6$
- $\sqrt{x^2 - 1 - 5(x-1)} + 3x = 3$

Esercizi

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

- $\sqrt{16+x^2}-x \leq -3$
- $\sqrt{x-3} < 2x-1$
- $\sqrt{x^2+3x+3} < x-2$
- $\sqrt{x^2-4} < 4-x$
- $\sqrt{|x|+1} < 1-x$
- $\sqrt{x^2-4}+1 < 2x$
- $\frac{4\sqrt{5x}+10}{\sqrt{5x}+1} = 6$
- $\sqrt{x^2-1-5(x-1)}+3x = 3$
- $\sqrt{x^2-4x-21} > x-3$
- $\sqrt{x^2+2x+9}-1 \geq x$
- $\sqrt{-x+3} > x-3$
- $\sqrt{4(1+x^2)} > 5-x+\sqrt{1+x^2}$
- $\sqrt{4x+x^2} > 1+x$
- $\sqrt{x^2-9} > 5-x$
- $\sqrt{9+x^2} \geq |x|+1$