Corso Zero
Equazioni e disequazioni con valore assoluto

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

September 19, 2022

Il valore assoluto

Si definisce **Valore Assoluto** (o modulo o intensità) di un numero reale x , e si indica col simbolo $|x|$, il numero così definito:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Esempi: $|3| = 3, |2| = 2, |0| = 0.$
Dalla definizione segue la seguente proprietà:

$$|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \leftrightarrow x \leq -a \; o \; x \geq a$$

Proprietà del valore assoluto

Proprietà del valore assoluto:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ o \ x > a$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq \Leftrightarrow x \leq -a \ o \ x \geq a$
- Il valore assoluto è sempre non negativo (cioè è sempre maggiore o uguale a zero), in particolare $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Il valore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti $|xy| = |x| \cdot |y|$
- Il valore assoluto del quoziente è uguale al quoziente dei valori assoluti $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
- Disuguaglianza triangolare : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

Le equazioni e disequazioni che coinvolgono i valori assoluti possono essere risolte spezzandole in due casi distinti, sfruttando la definizione di valore assoluto. Si possono verificare i seguenti casi.

Analizziamo solo l'espressione $|-2-3x|$. Utilizzando la definizione di modulo che abbiamo visto prima possiamo dire che:

$$|-2-3x| = \begin{cases} -2-3x & \text{se } -2-3x \geq 0 \\ -(-2-3x) & \text{se } -2-3x < 0 \end{cases}$$

che svolgendo i calcoli diventa:

$$|-2-3x| = \begin{cases} -2-3x & \text{se } x \leq -\frac{2}{3} \\ 2+3x & \text{se } x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Abbiamo così trovato una regola per riscrivere una espressione con valore assoluto contenente un'incognita.

Equazioni con un solo valore assoluto

Partiamo direttamente con un esercizio: prendiamo l'equazione:

$$|4x^2 - 1| = 1 + 2x.$$

Sappiamo come gestirlo. Infatti:

$$|4x^2 - 1| = \begin{cases} 4x^2 - 1 & \text{se } 4x^2 - 1 \geq 0 \\ -(4x^2 - 1) & \text{se } 4x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene che: la disequazione di secondo grado $4x^2 - 1 \geq 0$ ha come soluzione $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$ quindi per questi valori di x possiamo scrivere $4x^2 - 1$ al posto di $|4x^2 - 1|$; la disequazione $4x^2 - 1 < 0$ ha come soluzione $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ quindi per questi altri valori di x possiamo scrivere $-4x^2 + 1$ al posto di $|4x^2 - 1|$.

In definitiva la nostra equazione è a tutti gli effetti equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) all'unione delle soluzioni di due sistemi misti:

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 = 1 + 2x \\ x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} -4x^2 + 1 = 1 + 2x \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Prendiamo il primo sistema. Le soluzioni dell'equazione di secondo grado $4x^2 - 1 = 1 + 2x$ sono $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$.
Entrambe rispettano la condizione $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$?presente nel sistema: quindi sono entrambe soluzioni del sistema considerato.
Nel secondo sistema, abbiamo invece l'equazione
$-4x^2 + 1 = 1 + 2x$
Questa equazione ha soluzioni $x = -\frac{1}{2} \vee x = 0$; solo la seconda rispetta la condizione $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$?presente nel sistema, e quindi solo $x = 0$ è una soluzione del secondo sistema.

In conclusione, l'unione delle soluzioni dei due sistemi è:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$$

e quindi questo insieme è anche l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|4x^2 - 1| = 1 + 2x$.
Sulla falsariga di quanto abbiamo visto in questo esercizio svolto, possiamo dare una regola generale per affrontare un'equazione con un valore assoluto contenente l'incognita.

Regola generale

Consideriamo un'equazione del tipo

$$|A(x)| = B(x)$$

con $A(x), B(x)$ espressioni generiche che possono contenere x. Allora l'insieme delle soluzioni di questa equazione è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi misti:

$$\begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -A(x) = B(x) \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

Basta ripercorrere l'esercizio appena fatto per rendersi conto che abbiamo effettivamente utilizzato questa regola per svolgerlo.

Caso particolare:
il caso
$$|A(x)| = k$$
Nel caso in cui l'equazione con valore assoluto sia del tipo $|A(x)| = k$ con $k \in \mathbb{R}$ (ovvero, $B(x)$ è un numero), allora è possibile semplificare il metodo risolutivo. Infatti, applicando meccanicamente la regola, otterremmo i due sistemi:
$$\begin{cases} A(x) = k \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -A(x) = k \\ A(x) < 0 \end{cases}$$
ma ci accorgiamo di alcune cose:

- Se $k < 0$, sia il primo che il secondo sistema sono impossibili (per esempio, nel primo, $A(x)$ dovrebbe essere contemporaneamente uguale a un numero negativo e non negativo) e quindi anche l'equazione di partenza è impossibile;
- se $k = 0$, il primo sistema è equivalente all?equazione $A(x) = 0$ e il secondo è impossibile, quindi l'equazione di partenza è equivalente a $A(x) = 0$;
- se $k > 0$, l'unione dei due sistemi e quindi l'equazione di partenza è equivalente all'insieme delle soluzioni di $A(x) = k \vee A(x) = -k$ (in pratica, le condizioni aggiuntive nei sistemi diventano superflue).

Equazioni con più di un valore assoluto

A volte ci si trova di fronte a esercizi di questo tipo:

$$|2x - 1| + |3 - x| = 4x + 4$$

Come possiamo procedere in questo caso?
Sicuramente la regola che abbiamo esposto prima non vale più, perché abbiamo a che fare con due valori assoluti diversi fra loro.
Sicuramente possiamo dire che:

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1) & \text{se } 2x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \ (A) \\ -2x + 1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \ (B) \end{cases}$$

L'equazione togliendo il primo valore assoluto si raddoppia :

$$1)\ 2x - 1 + |3 - x| = 4x + 4\ se\ si\ ha\ condizione\ A:\ \ x \geq \frac{1}{2}$$

$$2)\ -2x + 1 + |3 - x| = 4x + 4\ se\ si\ ha\ condizione\ B:\ \ x < \frac{1}{2}$$

Iniziamo con l'equazione 1)
Condizione A $x \geq \frac{1}{2}$
sotto questa condizione l'equazione adesso ha un solo valore assoluto

$$|3 - x| = 2x + 5$$

da cui ricordiamo che a sua volta per togliere il secondo valore assoluto si raddoppia di nuovo:

$$3 - x = 2x + 5\ se\ x \leq 3$$

$$x - 3 = 2x + 5\ se\ x > 3$$

da cui riportando in ognuno la condizione A, abbiamo:

$$1)\ 3x = -2\ se\ si\ ha \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}\ (A) \\ x \leq 3 \end{cases} \quad ;1')\ x = -8\ se\ si\ ha \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}\ (A) \\ x > 3 \end{cases}$$

1) $x = -\frac{2}{3}$ non è compatibile con le condizioni, quindi essa si scarta.
1') $x = -8$ idem, non è compatibile.
Ricominciamo il tutto con l'equazione 2)
Condizione B $x < \frac{1}{2}$
sotto questa condizione l'equazione adesso ha un solo valore assoluto

$$|3 - x| = 6x + 3$$

da cui ricordiamo che a sua volta per togliere il secondo valore assoluto si raddoppia di nuovo:

$$3 - x = 6x + 3\ se\ x \leq 3$$

$$x - 3 = 6x + 3\ se\ x > 3$$

da cui riportando in ognuno la condizione B, abbiamo:

$$3)\ 7x = 0 \ se\ si\ ha \begin{cases} x < \frac{1}{2}\ (B) \\ x \leq 3 \end{cases} ; 4)\ 5x = -6\ se\ si\ ha \begin{cases} x < \frac{1}{2}\ (B) \\ x > 3 \end{cases}$$

2) $x = 0$ è compatibile con le condizioni, quindi è soluzione.
2') $x = -\frac{6}{5}$ sistema impossibile. Quindi la soluzione $x = 0$, che è di conseguenza l'unica soluzione dell'equazione

Regola generale

Caso particolare: le equazioni del tipo

$$|A(x)| = |B(x)|$$

In realtà questa tipologia di equazioni con due valori assoluti è molto più semplice da risolvere, infatti:

$$|A(x)| = |B(x)| \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = B(x) \ \vee \ A(x) = -B(x)$$

Disequazioni con un solo valore assoluto ed un polinomio a secondo membro

Dati A, B, C essi rappresentano generici polinomi o funzioni di x, ed n rappresenta un numero reale positivo. Iniziamo a considerare due polinomi, di cui uno in valore assoluto ed uno a secondo membro.
Si possono presentare quattro casi:

- 1) $|A| > B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A > B \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ A < -B \end{cases}$

- 2) $|A| < B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ A > -B \end{cases}$

in modo analogo

- 3) $|A| \geq B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \geq B \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ A \leq -B \end{cases}$

- 4) $|A| \leq B \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq B \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ A \geq -B \end{cases}$

Disequazioni con un solo valore assoluto ed un numero positivo n a secondo membro

$|A| > n \rightarrow A < -n \ o \ A > n$

$|A| < n \rightarrow -n < A < n$

$|A| \geq n \rightarrow A \leq -n \ o \ A \geq n$

$|A| \leq n \rightarrow -n \leq A \leq n$

Disequazioni con un solo valore assoluto ed un numero negativo $-n$ a secondo membro

$|A| > -n \rightarrow Sempre\ vera\ \ :\ \forall x \in \mathbb{R}$

$|A| < -n \rightarrow Sempre\ falsa$

$|A| \geq n \rightarrow Sempre\ vera\ \ :\ \forall x \in \mathbb{R}$

$|A| \leq n \rightarrow Sempre\ falsa$

Disequazioni con un solo valore assoluto e lo zero a secondo membro

$|A| > 0 \rightarrow Sempre\ vera\ per\ ogni\ A \neq 0$

$|A| < 0 \rightarrow Sempre\ falsa$

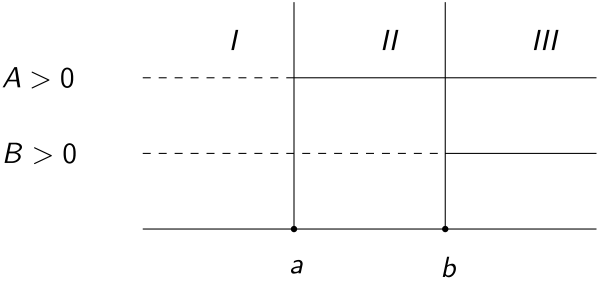
$|A| \geq 0 \rightarrow Sempre\ vera\ :\ \forall x \in \mathbb{R}$

$|A| \leq 0 \rightarrow A = 0$

Disequazioni con due o più valori assoluti nessuna soluzione

$$|A| + |B| \gtrless C$$

si studia il segno di A e di B



Per risolvere

- si risolvono le disequazioni $A > 0$ e $B > 0$,
- siano $x > a$ e $x > b$ le loro soluzioni, esse si rappresentano su grafico
- dall'osservazione del grafico la disequazione si scinde nei seguenti sistemi:

$$I \begin{cases} x < a \\ -A - B \gtrless C \end{cases} \cup \; II \begin{cases} a \leq x \leq b \\ A - B \gtrless C \end{cases} \cup \; III \begin{cases} x > b \\ A + B \gtrless C \end{cases}$$

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni con valore assoluto:

- $|x-1|+3|x|=2x+4$
- $|1-|x||=\frac{1}{2}$
- $\frac{|x^2|+3}{||x-1}-|x-2|=0$
- $\frac{|2x^2-3x+1}{x-2}=1$
- $|x-1|+2|x+3|=7x$
- $|3x+\frac{5}{2}|=7x-\frac{1}{2}$
- $|x-1|-3x=|2x+8|$