Corso Zero
Equazioni di I e di II grado

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

September 19, 2022

Equazioni di I grado

Le equazioni

- Esempi:
  $2x+3=0$ $3y+2=5$ $3ax^2+x=2$ $3bx^2-x+4=0$
  x, y, z, ecc. sono variabili, cioè possono assumere vari valori. In particolare, non conoscendo questi valori (dobbiamo trovarli), si dicono INCOGNITE.
  DEFINIZIONE di EQUAZIONE
  Si dice EQUAZIONE una identità (uguaglianza) tra due espressioni algebriche per la quale si vogliono determinare i valori delle variabili che la rendono vera.

Equazioni

I numeri e le lettere che compaiono davanti alle incognite si dicono *coefficienti*.
Numeri e lettere che non sono seguite da variabili si dicono *termini noti* (conosciuti, non dobbiamo trovare nulla).
Si dice **grado** di un'equazione l'esponente maggiore dell'incognita.
Es. $2x + 4 = 0$ equazione di primo grado
$3x^2 - x + 5 = 0$ equazione di secondo grado
Si dicono **soluzioni** (o radici) dell'equazione, i numeri che, sostituiti all'incognita, rendono vera l'equazione, cioè l'annullano.
Il numero massimo di soluzioni che può avere un'equazione in una incognita è uguale al suo grado.
Primo grado $\Rightarrow$ una soluzione
Secondo grado $\Rightarrow$ due soluzioni
e così via $\cdots$

Principi di equivalenza

Se ad esempio, abbiamo l'equazione: $2x + 3 = x + 5$
Possiamo aggiungere a tutti e due i termini la quantità -5, ottenendo: $2x + 3 - 5 = x + 5 - 5$ e cioè svolgendo i calcoli: $2x - 2 = x$.
Possiamo farlo anche con le incognite (sono sempre quantità) e quindi possiamo aggiungere ai due termini la quantità $-x$, ottenendo $2x - 2 - x = x - x$ che, svolgendo i calcoli. diventa $x - 2 = 0$.
Se, ad esempio, abbiamo $1x = 5$ possiamo moltiplicare entrambi i termini per due e ottenere $2x = 10$ che, semplificando a sinistra e moltiplicando a destra, diventa: $x = 5$
Primo principio di equivalenza: se si aggiunge o si sottrae ai due membri di un'equazione una stessa quantità, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.
Secondo principio di equivalenza: se si moltiplicano o dividono i due membri di un'equazione una stessa quantità, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Regole pratiche

Avrete già capito che dai due principi di equivalenza derivano alcune regole pratiche molto utili.
Es.$2x + 5 = 0$ portando il 5 a destra, diventa: $2x = -5$.
Se poi ho una stessa quantità, da una parte all'altra dell'uguale, se ne porto una dall'altra parte, i due termini si annullano: es $2x + 5 = 5$, diventa $2x + 5 - 5 = 0$ e quindi, siccome $+5$ e -5 si annullano, quando ho due quantità uguali (anche in segno) nei due membri, posso eliminarle direttamente.
Dal secondo principio di equivalenza
Es. se alla fine di tutti i calcoli mi ritrovo con un'equazione $-x = 5$ diventa $x = -5$.

Equazioni di I grado

Data un'equazione

- Hanno la forma canonica

$$ax + b = 0$$

(con a e b coefficienti, cioè, per il momento, numeri)

- La soluzione si trova ponendo $x = -\frac{b}{a}$

$$ax = -b$$

1) Se $a \neq 0$
l'equazione si dice *determinata* (la soluzione è $x = -\frac{b}{a}$)
2) Se $a = 0$
possiamo avere due casi

- $b \neq 0$ si dice equazione impossibile
- $b = 0$ equazione indeterminata

Equazioni fratte

L'incognita compare anche al denominatore
Per trovare la soluzione dobbiamo

- 1. innanzitutto escludere i valori che annullano il denominatore (perchè una frazione con 0 al denominatore non ha senso) e quindi dobbiamo porre il denominatore uguale a zero.
- 2. Fatto questo, si risolve il numeratore come se avessimo una funzione intera.
- 3. Se la soluzione del numeratore diverse da quelle del denominatore, si accettano, altrimenti l'equazione è impossibile.

Equazioni riconducibili a equazioni di I grado

Alcune volte equazioni di grado superiore al primo possono ridursi a equazioni di primo grado applicando la legge di annullamento del prodotto.
Ad esempio:
$x^2 - 25 = 0$ In realtà è l'equazione $(x-5)(x+5) = 0$ che, per la legge di annullamento del prodotto, si risolve ponendo:
$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$
$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$
Si ricava allora la regola:
Data una qualsiasi equazione di grado n, se è possibile scomporre il polinomio in n fattori di primo grado, applicando la legge di annullamento del prodotto, la risoluzione dell'equazione si riduce alla soluzione delle equazioni di primo grado ottenute, uguagliate a zero.

Equazioni di II grado

Equazioni di II grado
Un'equazione di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si dice

- **completa** quando tutti i coefficienti sono diversi da 0
- **incompleta** quando il coefficiente b o il coefficiente c o entrambi sono uguali a 0, in particolare si dice:
  1) pura se $b = 0$
  2) spuria se $c = 0$
  3) monomia se $b = 0$ e $c = 0$

Formula risolutiva

Abbiamo l'equazione completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La formula risolutiva è

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Otterrò due soluzioni, x_1 e x_2, prendendo la formula scritta sopra una volta con il segno $+$e una volta con il segno $-$.
Siccome siamo nell'insieme $\mathbb{R}$, un'equazione di secondo grado ha soluzione solo se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.
Possiamo avere tre casi:
$\Delta > 0 \rightarrow$ l'equazione ha due soluzioni distinte
$\Delta = 0 \rightarrow$ l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$
$\Delta < 0 \rightarrow$ l'equazione non ha soluzioni nell?insieme $\mathbb{R}$ e quindi si dice impossibile

Formula risolutiva se b è pari

Abbiamo l'equazione completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La formula risolutiva è

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}$$

Otterrò due soluzioni, x_1 e x_2, prendendo la formula scritta sopra una volta con il segno $+$e una volta con il segno $-$.
Siccome siamo nell'insieme $\mathbb{R}$, un'equazione di secondo grado ha soluzione solo se $\frac{\Delta}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac \geq 0$.
Possiamo avere tre casi:
$\frac{\Delta}{4} > 0 \rightarrow$ l'equazione ha due soluzioni distinte
$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow$ l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$
$\frac{\Delta}{4} < 0 \rightarrow$ l'equazione non ha soluzioni nell?insieme $\mathbb{R}$ e quindi si dice impossibile

Equazioni di grado superiore al secondo

Per risolvere un'equazione di grado superiore al secondo basta **scomporla** in un'equazione del tipo:

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdots F(x) = 0$$

con $A(x), B(x), C(x), \cdots, F(x)$ polinomio di I o di II grado e porre OGNI fattore uguale a zero.
Da cui:

$$A(x) = 0, B(x) = 0, C(x) = 0, \cdots, F(x) = 0$$

Risolvere le singole equazioni ed elencare i risultati ottenuti.
Esempio:
$(x-1)(x^2-4) = 0 \rightarrow$ Porre $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ ed inoltre porre uguale a zero anche $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$
Le soluzioni dell'equazione sono $\{1, +2, -2\}$