Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 29/06/10

Ia

1) Dire per quali valori del parametro reale h le assegnazioni

$$\begin{cases} u_1 = (h, -1, -1) \in V_1 & \text{è autovettore rispetto all'autovalore} \quad T = 1, \\ u_2 = (h, h, -h-4) \in V_{-1} & \text{è autovettore rispetto all'autovalore} \quad T = -1, \\ f(1,0,0) = (3,2,2) \end{cases}$$

definiscono un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
2) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3) Studiare la semplicità di f e determinare, quando possibile, una base di autovettori.
4) Calcolare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(2h, h-1, -h-5) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (2h, h-1, -h-5)\}.$$

Ib

Studiare l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ dato da

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^{2,2} \quad \varphi(X) = HX \quad \text{con } H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolando nucleo ed immagine di φ. Verificare che $\operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^{2,2}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Sono assegnate le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ; \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

Determinare la generica retta $\mathbf{t}$ incidente con $\mathbf{r}$ e parallela ad $\mathbf{s}$ e la generica retta $\mathbf{u}$ incidente con $\mathbf{s}$ e parallela ad $\mathbf{r}$. Trovate il piano α luogo delle rette $\mathbf{t}$ ed il piano β luogo delle rette $\mathbf{u}$. Verificare che α e β sono paralleli e trovare la loro distanza. Verificare che $d(\alpha, \beta) = d(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per $A \equiv (1, 0)$ con tangente la retta $x - y - 1 = 0$, per $B \equiv (0, 2)$ e per O. Studiare la conica Γ luogo dei centri di simmetria delle coniche di Φ.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, la famiglia di quadriche di equazione

$$x^2 + 2hxy + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 0$$

SVOLGIMENTO

Ia

1) Sono assegnate le immagini dei vettori u_1, u_2, e_1; affinché f sia definito dobbiamo richiedere che questi tre vettori siano indipendenti. Si vede facilmente che ciò si verifica per $h \neq -2$. Quindi nel seguito dobbiamo supporre $h \neq -2$.
2) Possiamo scegliere se determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica oppure

quella rispetto alla base $\mathscr{A} = [u_1, u_2, e_1]$. Scegliamo quest'ultima possibilità; indicheremo tra parentesi quadre le componenti dei vettori rispetto alla base canonica. Dai dati si ha

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = -u_2 \\ f(e_1) = (3,2,2) = -2u_1 + (2h+3)e_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2h+3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che decidendo di usare la base canonica si ottiene la matrice (decisamente meno amichevole)

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & h & h \\ 2 & h+1 & h \\ 2 & h+2 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Quindi se $h \neq -\frac{3}{2}$ f è un isomorfismo; per $h = -\frac{3}{2}$ si ha

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(u_1, -u_2) \qquad \ker f = \{(2z, 0, z)_A\} = \mathscr{L}(2u_1 + e_1)$$

3) Gli autovalori di f sono $T = -1, 1, 2h+3$; per $h \neq -1$ questi autovalori sono distinti (si ricordi che $h \neq -2$), quindi f è semplice. Ovviamente sappiamo che $V_1 = \mathscr{L}(u_1)$, $V_{-1} = \mathscr{L}(u_2)$ quindi dobbiamo calcolare solo il terzo autospazio.
$T = 2h+3$

$$\begin{pmatrix} -2h-2 & 0 & -2 \\ 0 & -2h-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad V_{2h+3} = \mathscr{L}(u_1 - (h+1)e_1) \ \ [\mathscr{L}(1,1,1)]$$

Per $h = -1$ si ha l'autovalore $T = 1$ doppio; si verifica subito che l'autospazio associato ha dimensione 1 (come prima), quindi f non è semplice.
4) Osservato che $(2h, h-1, -h-5) = u_1 + u_2 = (1,1,0)_A$ dobbiamo risolvere il facile sistema lineare associato alla matrice completa

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2h+3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ll} h \neq -\frac{3}{2} & f^{-1}(u_1+u_2) = \{u_1 - u_2\} \\ h = -\frac{3}{2} & f^{-1}(u_1+u_2) = \{(1+2z)u_1 - u_2 + ze_1\} \end{array}$$

Ib

Calcoliamo la legge esplicita di φ:

$$\varphi(X) = \varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z & y-t \\ -2x+2z & -2y+2t \end{pmatrix}$$

e determiniamo la matrice associata a φ rispetto alla base standard $\mathscr{E}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$

$$M^{\mathscr{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ \operatorname{Ker}\varphi = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}\right\} \end{array}$$

Si verifica facilmente che una base di $\operatorname{Im}\varphi$ ed una base di $\operatorname{Ker}\varphi$ formano una base di $\mathbb{R}^{2,2}$, quindi la somma tra questi sottospazi è diretta.

1) Detto $R \equiv (1, \beta, -\beta) \in \mathbf{r}$ il punto generico, congiungendo R col punto improprio di $\mathbf{s}$, $S_\infty \equiv (0, 1, 1, 0)$ si ha

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z - 2\beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha : \; x - 1 = 0$$

Analogamente, detto $S \equiv (0, \gamma, \gamma) \in \mathbf{s}$ il punto generico, congiungendo S col punto improprio di $\mathbf{r}$, $R_\infty \equiv (0, 1, -1, 0)$ si ha

$$\mathbf{u} : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \beta : \; x = 0$$

I due piani sono evidentemente paralleli ed hanno lo stesso vettore normale $\vec{n} = (1, 0, 0)$ che è ortogonale sia ad $\mathbf{r}$ che ad $\mathbf{s}$. Pertanto la retta ortogonale ed incidente con le due rette è anche ortogonale ai due piani, quindi le distanze sono uguali. Un facile calcolo mostra che $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = d(\alpha, \beta) = 1$.
2) Ci troviamo nel caso della tangenza, quindi nel fascio Φ ci sono solo due coniche spezzate distinte. Usiamo queste coniche per determinare l'equazione del fascio

$$\Phi : \; y(2x + y - 2) + hx(x - y - 1) = 0 \quad \Rightarrow \Phi : \; hx^2 + (2 - h)xy + y^2 - hx - 2y = 0\,.$$

Naturalmente conosciamo le coniche spezzate ed i punti base del fascio, dobbiamo caratterizzare le coniche irriducibili. $|A| = -\frac{h^2 - 8h + 4}{4}$ quindi si ha:

$|A| > 0 \quad 4 - 2\sqrt{3} < h < 4 + 2\sqrt{3}$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;

$|A| < 0 \quad h < 4 - 2\sqrt{3}$, $h > 4 + 2\sqrt{3}$ IPERBOLI. Per $h = -1$ si ha l'iperbole equilatera $-x^2 + 3xy + y^2 + x - 2y = 0$;

$|A| = 0 \quad h = 4 \pm 2\sqrt{3}$ PARABOLE.

Per determinare la conica Γ dobbiamo eliminare il parametro dal sistema

$$\begin{cases} hx + (1 - \frac{h}{2})y - \frac{h}{2} = 0 \\ (1 - \frac{h}{2})x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \frac{h}{2} = \frac{x + y - 1}{x} \quad \Rightarrow \Gamma : \; 2x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 1 = 0\,.$$

Si trovano facilmente $|B| = -\frac{3}{4}$ e $|A| = -3$, quindi Γ è un'iperbole.
3) Dalla matrice B associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & -1 \\ h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -1 \\ \\ |A| = 1 - h^2 \end{array}$$

quindi per nessun valore di h si trovano quadriche degeneri. Si osservi che per $h = \infty$ si ha la quadrica spezzata $xy = 0$. Per $h = \pm 1$ si hanno due paraboloidi; siccome il determinante di B negativo sono paraboloidi ellittici. Per $h \neq \pm 1$ sono ellissoidi reali oppure iperboloidi ellittici. Il P.C.(A) è $-T^3 + 3T^2 + (h^2 - 3)T + (1 - h^2) = 0$, quindi si hanno due casi

- $-1 < h < 1$ tutte variazioni quindi ELLISSOIDI reali. Per $h = 0$ si ha una sfera
- $h < -1$, $h > 1$ invece si hano IPERBOLOIDI ELLITTICI.