Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 28/01/10

I

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le assegnazioni

$$\begin{cases} f(1,0,1) = (h, h-1, h) \\ f(0,2,1) = (1,3,2) \\ f(1,-1,0) = (h, h-2, h-1) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ ed $\operatorname{Im} f$.
2) Determinare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(0,1,1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (0,1,1)\}$$

3) Studiare la semplicità di f determinandone in ogni caso gli autospazi.
4) Dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid hx + (1-h)y - z = 0\}$ calcolare $f(V)$ e verificare che si ha $f(V) \subseteq V$per ogni valore di h. Dire per quali valori di h l'endomorfismo $g : V \to V$ indotto da f è un isomorfismo.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.
1) Verificare che la conica

$$\Gamma : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - x + y = 0 \end{cases}$$

è una circonferenza e calcolare il centro H ed il raggio di Γ. Trovare le tangenti a Γ nei punti in cui il diametro OH seca Γ.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio Φ di coniche di equazione

$$x^2 + 2(h-1)xy + y^2 + 2hx = 0.$$

Determinare e studiare la conica luogo dei centri di simmetria delle coniche di Φ.
3) Studiare, al variare del parametro h, la quadrica di equazione

$$x^2 - 2hxy + 2hyz - z^2 + 2x - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1)) Si calcola facilmente la matrice associata ad f rispetto alla base canonica

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad |M(f)| = h+1$$

quindi per $h \neq -1$ f è un isomorfismo. Se $h = -1$ si ha

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \mathcal{L}((0,1,1),(1,1,0)) \\ \operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)\} \end{array}$$

2) Riducendo la matrice completa (A,B) si ricava

$$(A,B) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & -1 & | & 0 \\ h & 2 & -1 & | & 1 \\ h & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h+1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ h & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h+1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ h+1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq -1$ si ha $f^{-1}(0,1,1) = \{(0,1,1)\}$. Per $h = -1$ si ha $\rho(A) = \rho(A,B) = 2$ e si ricava facilmente $f^{-1}(0,1,1) = \{(y-1,y,y)\}$.
3) Possiamo calcolare il polinomio caratteristico, ed avremo

$$P(T) = (h+1-T)(2-T)(-T)-h-h+ht+h+1-T+(2-T)h = (h+1-T)(2-T)(-T)+(h+1-T) =$$

$$(h+1-T)(-2T^2+T^2+1) = (h+1-T)(T-1)^2 = 0$$

quindi calcoliamo gli autovalori $T = 1$, $T = h+1$. Se $h \neq 0$ si ha $T = 1$ doppio ($m_1 = 2$), $T = h+1$ semplice ($m_{h+1} = 1$). In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = 1$

$$\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ h & 1 & -1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \{(x,y,hx+y)\} \text{ con base } \quad u_1 = (1,0,h), u_2 = (0,1,1)$$

$T = h+1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 1-h & -1 \\ h & 1 & -h-1 \end{pmatrix} \qquad V_{h+1} = \{(x,x,x)\} \text{ con base } \quad u_3 = (1,1,1).$$

Nel caso $h = 0$ si ha l'autovalore triplo $T = 1$ ($m_1 = 3$), ma l'autospazio $V_1 = \{(x,y,y)\}$ ha dimensione 2, quindi f non è semplice.
4) Il sottospazio V considerando che $z = hx + (1-h)y$ ha base $v_1 = (1,0,h)$, $v_2 = (0,1,1-h)$, e si ha $f(V) = \mathcal{L}(f(v_1), f(v_2))$. Calcolando queste immagini
$f(v_1) = M(f) \cdot \underline{v_1} = (1,0,h) = v_1 \in V$, $idem f(v_2) = (h, 1+h, 1)$ quindi soddisfa l'equazione cartesiana di V: $h^2 + 1 - h^2 - 1 = 0$ vediamo che $f(V) \subseteq V$. La matrice associata a g rispetto alla base $A = [v_1, v_2]$ è

$$M^A(g) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & h+1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g \text{ è isomorfismo } \Leftrightarrow h \neq -1 \Leftrightarrow f(V) = V.$$

Ovviamente per $h = -1$ si ha $\ker g = \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} g = \mathcal{L}(v_1)$.

II

1) Per verificare che Γ è una circonferenza dello spazio basta che i suoi punti impropri soddisfino il cerchio assoluto (luogo dei punti ciclici dello spazio). Calcolando i punti impropri di Γ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x^2+y^2+xy = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x-y \\ y = \frac{-x \pm ix\sqrt{3}}{2} \\ t = 0 \end{cases}$$

$P_1^\infty = (1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 0)$
$P_2^\infty = (1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, 0)$

Sostituendoli nel cerchio assoluto $x^2+y^2+z^2=0$ si vede che lo soddisfano entrambi $\Rightarrow \Gamma$ è una circonferenza.
Calcoliamo adesso il suo centro e il suo raggio usando il centro della sfera che contiene la circonferenza (quadrica contenete una conica) e imponiamo che il centro della sfera appartiene al piano della nostra conica Γ in modo che centro della sfera e centro della circonferenza coincidano.
Scriviamo la quadrica contenente Γ

$$(x+y+z)(ax+by+cz+d)+x^2+xy+y^2-x+y=0$$

Imponiamo che sia una sfera ($a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0, a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$). Quindi si hanno le seguenti condizioni

$$\begin{cases} a+1=b+1 \\ a+b+1=0 \ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2+(d-1)x+(d-1)y+dz=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2(d-1)x+2(d+1)y+2dz=0$$

Possiamo, dunque, calcolare il centro della sfera $H=(1-d,-1-d,-d)$ imponendo che il centro H appartenga al piano della circonferenza $x+y+z=0$ si ottiene $d=0$ e quindi $H=(1,-1,0)$ e il raggio coincide con il raggio della sfera $r=\sqrt{2}$.
Scriviamo la retta che passa per i due punti propri O e H:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}, z=0$$

$$\begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Se intersechiamo tale retta con la circonferenza troviamo due punti : O (questo è evidente) e un altro punto detto $O'(2,-2,0)$.
Quindi le rette tangenti alla circonferenza in O e in O' sono rette passanti per O e per O' che giacciono sul piano $x+y+z=0$ e sono perpendicolari alla retta OH:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

dove

$$\begin{cases} l+m+n=0 (giace\ su\ \pi) \\ -l+m=0\ (ortogonalita) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=m \\ n=0 \end{cases}$$

quindi le due rette sono

$$\begin{cases} z=0 \\ x-y=0 \end{cases}, \begin{cases} z=0 \\ x-y-4=0 \end{cases}$$

2) Ci poniamo sul piano $z=0$. Dalla matrice associata alla generica conica di Φ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & h-1 & h \\ h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |B|=-h^2,\ |A|-h^2+2h$$

Le coniche spezzate si trovano per $h = 0 : (x - y)^2 = 0$ e l'altra riportando il fascio a due parametri con $h = \frac{\lambda}{\mu}$ e successivamente poniamo $\mu = 0 : x(y + 1) = 0$; secando queste due coniche si trovano facilmente i punti base O e $(-1, -1)$, ciascuno contato due volte. Caratterizziamo le coniche irriducibili di Φ:
$|A| > 0 \quad 0 < h < 2$ ELLISSI. Per $h = 1$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x = 0$;
$|A| < 0 \quad h < 0, h > 2$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
$|A| = 0$ per $h = 2$ si ha la parabola $p : (x - y)^2 + 4x = 0$.
Dal sistema del centro di simmetria, eliminando il parametro si trova

$$\begin{cases} x + (h-1)y + h = 0 \\ (h-1)x + y = 0 \end{cases} \qquad h = 1 - \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; (x - y)(x + y + 1) = 0$$

cioè si trova una conica spezzata. Osserviamo che i punti della retta $x - y = 0$ sono gli (infiniti) centri di simmetria della conica spezzata $(x - y)^2 = 0$ $(h = 0)$, i punti della retta $x + y + 1 = 0$ sono i centri di simmetria di tutte le altre coniche di Φ.
3) Dalla matrice associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 1 \\ -h & 0 & h & 0 \\ 0 & h & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = h^2,\ |A| = 0$$

Consideriamo il caso particolare:
$h = 0$: si ha il cilindro iperbolico $x^2 - z^2 + 2x - 1 = 0$, di vertice $Z^\infty = (0, 1, 0, 0)$.
Per $h \neq 0$ si hanno quadriche non degeneri, in particolare paraboloidi (in quanto $|A| = 0$). Inoltre $\det B > 0$ quindi si trovano paraboloidi iperbolici.