Corsi di Laurea in Ingegneria Civile, Gestionale (A-L)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 18 Febbraio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{A} = \{\underline{v_1} = (1,2,0), \underline{v_2} = (0,0,1), \underline{v_3} = (1,0,-1)\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(\underline{v_1}) &= h\underline{v_1} \\ f(\underline{v_2}) &= h\underline{v_1} + 4\underline{v_2} - \underline{v_3} \\ f(\underline{v_3}) &= (4+2h)\underline{v_1} + \underline{v_2} + 2\underline{v_3} \end{aligned}$$

1) Studiare f, determinando, in particolare, al variare di h, le equazioni cartesiane di nucleo e immagine.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Calcolare al variare di h la controimmagine

$$f^{-1}(1,2,0) = \{\underline{v} \in \mathbb{R} \mid f(\underline{v}) = (1,2,0)\}$$

4) Verificare che per ogni valore di h risulta $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$

5) Dire in quali casi f è invertibile; in questi casi determinare l'applicazione inversa di f e trovare una matrice associata ad f^{-1} .

Soluzione

1) Per studiare f troviamo la matrice associata a f rispetto $\mathcal{A}$. Dai dati si ha:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & h & 4+2h \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $|M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)| = 9h$. Perciò, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo ($\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$).

Se $h = 0$, allora:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)) = 2$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,4,-1)_{\mathcal{A}}, (4,1,2)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}((-1,0,5),(6,8,-1)$
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 40x - 29y + 8z = 0\}$. Per quel che riguarda il nucleo, invece, abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,0,0)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}((1,2,0)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2x = z = 0\}.$$

2) Per studiare la semplicità di f, dobbiamo calcolare il suo polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & h & 4+2h \\ 0 & 4-T & 1 \\ 0 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = (h-T)(T-3)^2.$$

Gli autovalori, dunque, sono $T = h$ e $T = 3$. Se $h \neq 3$, allora h è autovalore con molteplicità algebrica 1 e 3 è autovalore con molteplicità algebrica 2, mentre per $h = 3$ l'unico autovalore è 3 con molteplicità algebrica 3.

Supponiamo che sia $h \neq 3$. In tal caso f non è semplice poichè calcolando $V_3 = \ker f_3$ risulta che $V_3 = \{(-\frac{h+4}{h-3}z, -z, z)_{\mathcal{A}}\}$ quindi la dimensione di esso è 1 (non 2).
Supponiamo che sia $h = 3$. In tal caso f non è semplice poichè calcolando $V_3 = \ker f_3$ risulta che

$$\begin{pmatrix} h-3 & h & 4+2h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$V_3 = \{(x, 0, 0)\}$ allora la dimensione di esso è 1 (non 3).

3) Per calcolare la controimmagine di $\underline{v} = (1, 2, 0)$ devo usare la matrice associata alle basi canoniche e calcolare

$$M(f)\underline{x} = \underline{v}$$

Ma conosciamo solo $M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)$ quindi dobbiamo pensare $\underline{v} = (1, 2, 0)$ in componenti rispetto alla base $\mathcal{A}$ e poichè $\underline{v} = (1, 2, 0)$ coincide con il primo vettore di tale base $\underline{v_1}$ le sue componenti saranno $(1, 0, 0)_{\mathcal{A}}$:
(N.B. Sappiamo che per $h \neq 0 f(\underline{v_1}) = h\underline{v_1} \Rightarrow f^{-1}(\underline{v_1}) = \frac{1}{h}\underline{v_1} = (\frac{1}{h}, \frac{2}{h}, 0)$; per $h = 0 \Rightarrow v_1 \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow f^{(-1)}(v_1) = \emptyset$). Oppure

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}$$

etc

4) La verifica è immediata se $h \neq 0$ dato che $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Se $h = 0$ le basi di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

5) L'applicazione inversa esiste solo quando $h \neq 0$ (isomorfismo). La matrice associata rispetto alla stessa base $\mathcal{A}$ è la matrice inversa

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{4+4h}{9h} & -\frac{7h+16}{9h} \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la retta u passante per il punto $P = (1, -1, 1)$, ortogonale a r di equazioni

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

e parallela al piano $\pi\colon\ x - y - z - 3 = 0$.
Determinare il piano σ passante per $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale a r. Dopo avere verificato che la retta u e il piano σ sono paralleli determinare la loro distanza.

2) Sul piano z=0 determinare l' equazione dell'iperbole equilatera γ avente per asintoto l'asse $\overrightarrow{y}$ e tangente alla retta x+y-2=0 nel punto $(1,1)$. In particolare determinare centro di simmetria, asintoti e assi di simmetria dell'iperbole ottenuta. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$\Phi : (1+\lambda)x^2 + xy - 2(1+\lambda)x + \lambda = 0,$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Verificare che $\gamma \in \Phi$ e che tutte le iperboli di Φ hanno l'asse $\vec{y}$ per asintoto.

3) Studiare le quadriche di equazione:

$$kx^2 + y^2 - z^2 + 4kyz + 2y + 2 = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) I parametri direttori della retta r sono $(1,1,-1)$ e quelli del piano π sono $(1,-1,-1)$. Dunque le condizioni di ortogonalità con r e di parallelismo con il piano π diventano, per i parametri direttori (l,m,n) di u le seguenti:

$$\begin{cases} l+m-n=0 \\ l-m-n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ l=n. \end{cases}$$

Ciò significa che possiamo prendere $(1,0,1)$ come parametri direttori di u. Imponendo il passaggio per il punto P, troviamo le equazioni di u:

$$s: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1 \\ z=1+t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-1 \end{cases}$$

Per quel che riguarda il piano σ, la condizione di ortogonalità con la retta r ci dice che i suoi parametri direttori sono gli stessi di r, cioè $(1,1,-1)$. Possiamo, dunque, calcolare l'equazione del piano σ imponendo il passaggio per Q:

$$\beta : x+y-z+d=0 \Rightarrow \beta : x+y-z=0.$$

Per quel che riguarda la distanza tra u e σ, possiamo osservare che, per costruzione, sono paralleli, da cui segue che la distanza tra u e σ è pari alla distanza di un punto qualsiasi di u da σ. Ad esempio, possiamo prendere il punto P:

$$d(u,\sigma) = d(P,\sigma) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) Il fascio di coniche viene scritto usando la bitangenza dato che l' asintoto è tangente all'iperbole nel punto improprio $Y^\infty = (0,1,0)$; l'altra tangente è assegnata. Quindi

$$x(x+y-2) + \lambda(x-1)^2 = 0$$
$$(1+\lambda)x^2 - 2\lambda x - 2x + xy + \lambda = 0$$

Iperbole equilatera se e solo se $TrA = 0 \Rightarrow 1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ l'equazione dell'iperbole equilatera:

$$x(x+y-2) - (x-1)^2 = 0 \Rightarrow xy - 1 = 0$$

Quindi centro di simmetria è l'origine O=(0,0), gli asintoti sono gli assi cartesiani $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, gli assi hanno coefficiente angolare $\pm 1 \Rightarrow$ le loro equazioni sono $y = \pm x$ La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1+\lambda & \frac{1}{2} & -1-\lambda \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

di modo che $|B| = -\frac{\lambda}{4}$. Dunque, vediamo che una conica spezzata è ottenuta per $\lambda = 0$ e osserviamo che l'altra conica spezzata è quella che non si ottiene per alcun valore di λ cioè $(x-1)^2 = 0$. Infatti, l'equazione del fascio di coniche può essere scritta in questo modo:

$$x(x+y-2) + \lambda(x-1)^2 = 0$$

Possiamo trovare i punti base dall'intersezione di queste due coniche:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x(x+y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xt + t^2 = 0 \\ x(x+y-2t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} y^2 + 4t^2 - 4yt + 2yt - 4t^2 + t^2 = 0 \\ x = -y + 2t. \end{cases} \begin{cases} (y-t)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -y + 2t. \end{cases} \begin{cases} y = 1 \\ x = 1. \end{cases}$$

Il primo sistema ci fornisce come soluzione il punto improprio $(0,1,0)$, mentre il secondo il punto proprio $(1,1)$.

Passiamo, ora, alla classificazione delle coniche del fascio. Osserviamo che $|A| = -\frac{1}{4} < 0$. Ciò vuol dire che tutte le coniche non spezzate del fascio ($\lambda \neq 0$) sono iperboli. Per $\lambda = -1$ si ottiene l'iperbole equilatera γ, che quindi è una conica del fascio. Secando la generica conica irriducibile ($\lambda \neq 0$) di Φ con l'asse $\vec{y}$ si ha (usando coordinate omogenee)

$$\begin{cases} x = 0 \\ t^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y^\infty = (0,1,0) \ \text{(doppio)}$$

cioè l'asse $\vec{y}$ è tangente alle iperboli di Φ in Y^∞, quindi è asintoto.

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2k & 1 \\ 0 & 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $|B| = -k(8k^2+1)$ e, inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 2k & -1 \end{vmatrix} = -k(1+4k^2)$$

Dunque, per $k = 0$, $|B| = |A| = 0$, per cui la quadrica è un cilindro oppure è spezzata. Per vedere questo è necessario vedere il rango di B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essendo chiaro che questa matrice ha rango 3, concludiamo che per $k = 0$ la quadrica è un cilindro.

Resta da vedere cosa accade nel caso $k \neq 0$. In tal caso, la quadrica è un iperboloide oppure un ellissoide. Per capire in quale caso ci troviamo dobbiamo guardare il segno degli autovalori della matrice A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 2k \\ 0 & 2k & -1-T \end{vmatrix} = -2T^3 + (1+k)T^2 + (4k^2+1)T - k(4k^2+1).$$

La quadrica è un ellissoide se gli autovalori sono tutti concordi, cioè se i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti concordi oppure a segno alterno. In tal caso, non ci troviamo in nessuno dei due casi, perché il primo coefficiente è negativo, il terzo positivo . Dunque, per

Per $k < 0$, $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$. Le quadriche sono in questi casi iperboloidi iperbolici. Per $k > 0$, $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$. Le quadriche sono in questi casi iperboloidi ellittici.