Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 4/12/10

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (1,-1,0),\ v_3 = (1,1,1)$ di $\mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le immagini

$$\begin{cases} f(v_1) = (2h+4, 0, 2h+4) \\ f(v_2) = (h, -h, 4-h) \\ f(v_3) = (3h+4, h, 3h+4) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica e studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, e_3]$.
3) Calcolare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(h-4, -h, 4-3h) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (h-4, -h, 4-3h)\}.$$

4) Sia $V = \mathcal{L}(v_1, e_3)$, verificare che $f(V) \subseteq V$ per ogni h. Detto $g : V \to V$ l'endomorfismo indotto da f, studiare la semplicità di g al variare di h.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Sono assegnate le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} , \quad \mathbf{s} : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

Calcolare l'angolo $\widehat{\mathbf{rs}}$ che esse formano. Determinare la generica retta $\mathbf{t}$ passante per $P \equiv (1,1,1)$ e tale che $\widehat{\mathbf{rt}} = \widehat{\mathbf{rs}}$. Trovare la quadrica Q luogo delle rette $\mathbf{t}$ verificando che si tratta di un cono.
2) Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A \equiv (-1,0,)$, $B \equiv (1,6)$ e per $C \equiv (0,1)$ con tangente la retta $3x - y + 1 = 0$. Determinare vertice, asse, fuoco e direttrice della parabola del fascio.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, la famiglia di quadriche di equazione

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + 2hxz + 2hx + 4z - 2 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base canonica risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_3) = (2h+4, 0, 2h+4) \\ f(e_1) - f(e_2) = (h, -h, 4-h) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (3h+4, h, 3h+4) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M(f) = \begin{pmatrix} 2h & h & 4 \\ 0 & h & 0 \\ 4 & h & 2h \end{pmatrix}$$

con $|M(f)| = 4h(h^2-4)$. Quindi se $h \neq 0, \pm 2$ f è un isomorfismo.

per $h = 0$: $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,0,1),(1,0,0))$, $\ker f = \{(0,y,0)\} = \mathscr{L}(0,1,0)$;

per $h = 2$: $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,0))$, $\operatorname{Ker} f = \{(x,0,-x)\} = \mathscr{L}(1,0,-1)$;

per $h=-2$: $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1,0,1),(1,1,1))$, $\operatorname{Ker} f = \{(x,0,x)\} = \mathscr{L}(1,0,1)$.

2) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, e_3]$: dobbiamo considerare le immagini di questi vettori e determinare le loro componenti rispetto ad $\mathscr{A}$.

$$f(v_1) = (2h+4, 0, 2h+4) = (2h+4)v_1 \Rightarrow [f(v_1)] = (2h+4, 0, 0)_{\mathscr{A}},$$

$$f(v_2) = (h, -h, 4-h) = hv_2 + (4-h)e_3 \text{ (calcolo esplicito)} \Rightarrow [f(v_2)] = (0, h, 4-h)_{\mathscr{A}},$$

$$f(e_3) = (4, 0, 2h) = 4v_1 + (2h-4)e_3 \text{ (calcolo esplicito)} \Rightarrow [f(v_3)] = (4, 0, 2h-4)_{\mathscr{A}},$$

quindi la matrice associata a f rispetto alla base $\mathscr{A}$ è

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2h+4 & 0 & 4 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 4-h & 2h-4 \end{pmatrix}.$$

3) Dal sistema lineare associato alla seguente matrice completa $(A|B)$ avremo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2h & h & 4 & h-4 \\ 0 & h & 0 & -h \\ 4 & h & 2h & 4-3h \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} h \neq 0, \pm 2 & f^{-1}(h-4, -h, 4-3h) = (1, -1, -1) \\ h = 0 & f^{-1}(-4, 0, 4) = \{(1, y, -1)\} \\ h = 2 & f^{-1}(-2, -2, -2) = \{(x, -1, -x)\} \\ h = -2 & f^{-1}(-6, 2, 10) = \{(z+2, -1, z)\} \end{cases}$$

4) Da quanto visto sappiamo che

$$\begin{cases} g(v_1) = f(v_1) = (h+2)v_1 \in V \\ g(e_3) = f(e_3) = 4v_1 + (2h-4)e_3 \in V \end{cases}$$

Quindi scriviamo la matrice associata a g rispetto alla base $\mathscr{A}' = \{v_1, e_3\}$:

$$M^{\mathscr{A}'}(g) = \begin{pmatrix} h+2 & 4 \\ 0 & 2h-4 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di g sono $T = h+2,\ 2h-4$; per $h \neq 6$ questi autovalori sono distinti, quindi g è semplice. Ovviamente sappiamo che $V_{h+2} = \mathscr{L}(v_1)$ e si trova facilmente $V_{2h-4} = \mathscr{L}(4v_1 + (h-6)e_3)$. Per $h = 6$ si ha l'autovalore $T = 8$ doppio e si verifica subito che l'autospazio associato ha dimensione 1 (come prima), quindi g non è semplice.

II

1) Calcoliamo i punti impropri delle due rette : $R_\infty \equiv (1,0,1,0)$ e $S_\infty \equiv (1,2,2,0)$. Per trovare l'angolo formato dalle due rette, applicando la ben nota formula si ottiene quindi

$$\cos \widehat{\mathbf{rs}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{\mathbf{rs}} = \frac{\pi}{4}$$

La retta $\mathbf{t}$ generica passante per un punto proprio $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ha equazioni

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - x_0 = m(z - z_0) \\ y - y_0 = n(z - z_0) \end{cases} \quad \text{con} \quad T_\infty \equiv (m, n, 1, 0)$$

quindi la retta generica $\mathbf{t}$ passante per P ha equazioni

$$\mathbf{t}: \begin{cases} x-1 = m(z-1) \\ y-1 = n(z-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T_\infty(m,n,1,0)$$

Di conseguenza $\cos\widehat{\mathbf{rt}} = \frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+1}}$ ed imponendo la condizione richiesta si ha

$$\frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2-2m=0.$$

Eliminando iparametri m ed n si ha $\frac{(y-1)^2}{(z-1)^2} - 2\frac{x-1}{z-1} = 0$, quindi Q ha equazione

$$Q: y^2-2xz+2x-2y+2z-1=0$$

Con facili calcoli si trova $|B|=0, |A|=-1$, si verifica facilmente che Q è un cono di vertice P.
2) Ci troviamo nel caso della tangenza, quindi nel fascio Φ ci sono solo due coniche spezzate distinte. Usiamo queste coniche per determinare l'equazione del fascio

$$\Phi: \; (y-3x-1)(y-3x-3)+h(y-x-1)(y-5x-1)=0 \quad \text{quindi}$$

$$\Phi: \; (5h+9)x^2+(1+h)y^2-6(1+h)xy+6(2+h)x-2(2+h)y+h+3=0\,.$$

Naturalmente conosciamo le coniche spezzate ed i punti base di Φ (in ogni caso $|B|=4h$) e dobbiamo caratterizzare le sue coniche irriducibili. $|A|=-4h(h+1)$ quindi si ha:

$|A|>0 \quad -1<h<0$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;

$|A|<0 \quad h<-1,\ h>0$ IPERBOLI. Per $h=-\frac{5}{3}$ si ha l'iperbole equilatera;

$|A|=0 \quad h=0,-1$; per $h=-1$ si ha la PARABOLA $y=2x^2+3x-1$.

La parabola del fascio ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y quindi per determinare il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice, ussiamo le ben note formule:

$V \equiv (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) \Rightarrow V \equiv (-\frac{3}{4}, -\frac{17}{8})$,

asse: $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

$F=(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}) \Rightarrow F=(-\frac{3}{4}, -2)$

direttrice: $y=-\frac{1+\Delta}{4a} \Rightarrow y=-\frac{9}{4}$

3) Dalla matrice B associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & h \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 2 & 2 \\ h & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -4(h^2-2) \\ \\ |A| = h^2-2 \end{array}$$

quindi per $h=\pm\sqrt{2}$ dato che $\rho(B)=3$ e $|A|=0$ si trovano due CILINDRI di vertici $(\mp\sqrt{2},0,1,0)$. Si osservi che per $h=\infty$ si ha la quadrica spezzata $x(z+1)=0$. Per nessun valore di h si hanno paraboloidi. Per $h \neq \pm\sqrt{2}$ si trovano ellissoidi oppure iperboloidi. Il P.C. di A è $x^3-2x^2-(h^2+1)x+2-h^2$, quindi non avendosi mai né tutte variazioni né tutte permanenze non si hanno ellissoidi. Si hanno due casi

- $|B|>0 \Rightarrow -\sqrt{2}<h<\sqrt{2}$ IPERBOLOIDI IPERBOLICI;
- $|B|<0 \Rightarrow h<-\sqrt{2},\ h>\sqrt{2}$ IPERBOLOIDI ELLITTICI.