Ingegneria Civile, Gestionale. Compito di **Geometria** del 04/12/09

Ia

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le immagini

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (h+3, h+3, 3) \\ f(0,1,-1) = (0,2,-h) \\ f(0,1,0) = (1,3,1) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Verificare che $T = h$ è autovalore di f. Discutere la semplicità di f. Nei casi in cui f è semplice determinare una base di autovettori.
3) Calcolare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(1,1,1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (1,1,1)\}$$

Ib

Determinare il generico endomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $(1,1) \in \operatorname{Ker} g$. Caratterizzare gli endomorfismi g che sono semplici.

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u.$
1) Dati i punti $A \equiv (1,1,1), P_\infty \equiv (1,1,0,0)$ si consideri la retta $\mathbf{r} = AP_\infty$. Determinare la generica retta $\mathbf{s}$ passante per A che forma con $\mathbf{r}$ un angolo di $\frac{\pi}{6}$. Verificare che la quadrica Q luogo delle rette $\mathbf{s}$ è un cono. Caratterizzare le coniche sezione di Q coi piani contenenti l'asse $\vec{z}$.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per O, con tangente l'asse $\vec{y}$, e per i punti $(1,0), (1,2)$. Determinare vertice e asse della parabola $\mathbf{p}$ di Φ.
3) Studiare, al variare di k, le quadriche di equazione

$$x^2 + y^2 - 2kyz + kz^2 - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

Ia

1) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base canonica e calcoliamo il suo determinante

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+2 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 \\ 2 & 1 & h+1 \end{pmatrix} \qquad |M(f)| = 2h(h+4) = 0 \quad \text{per } h = -4, 0$$

quindi se $h \neq -4, 0$ f è un isomorfismo. Consideriamo i casi particolari.

$$h = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \{(x, x, -3x)\} \\ \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1), (0,1,0)) \end{array}$$

$$h=-4 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)\} \\ \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,1,2),(1,1,-3)) \end{array}$$

2) Per verificare che h è autovalore osserviamo che la matrice $M(f)-hI$ non ha rango massimo

$$M(f)-hI = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ h & 3-h & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ha rango } <3,$$

quindi possiamo determinare il polinomio caratteristico

$$P(T) = -T^3 + 2(h+3)T^2 + \lambda T + 2h(h+4); \quad P(h)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -h^2-8h-8.$$

Abbassando di grado e risolvendo si trovano gli autovalori $T=2,\ h,\ h+4$. Se $h \neq \pm 2$ si hanno tre autovalori distinti quindi f è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.

$$T=2 \quad \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h-1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (2-h)x-(2-h)z=0 \\ y+(h+1)z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_2 = \{(x,-(h+1)x,x)\} \\ \text{con base } u_1=(1,-h-1,1) \end{array}$$

$$T=h \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ h & 3-h & 1 \\ 2 & 1 & h1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (h-2)x-(h-2)y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_h = \{(x,x,-3x)\} \\ \text{con base } u_2=(1,1,-3) \end{array}$$

$$T=h+4 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ h & -h-1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_{h+4} = \{(x,x,x)\} \\ \text{con base } u_3=(1,1,1) \end{array}$$

Consideriamo i casi particolari. Se $h=2$ si hanno gli autovalori $T=2$ $(m=2), T=6$. Calcoliamo V_2:

$$T=2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V_2 = \{(x,y,-2x-y)\} \\ \text{con base } u_1=(1,0,-2), u_2=(0,1,-1) \end{array}$$

quindi f è semplice. Se $h=-2$ si hanno gli autovalori $T=2$ $(m=2), T=-2$ Calcoliamo V_2:

$$T=2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \rho=2 \quad f \text{ non è semplice.}$$

3) Consideriamo la matrice completa

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} h+2 & 1 & 1 & 1 \\ h & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h+1 & 1 \end{array}\right)$$

Se $h \neq 0,-4$ si ha $\rho(A)=\rho(A|B)=3$ quindi si ha una sola soluzione. Ricordando l'autospazio V_{h+4} avremo

$$f^{-1}(1,1,1) = \left\{ \left(\frac{1}{h+4}, \frac{1}{h+4}, \frac{1}{h+4} \right) \right\}.$$

Per $h=0$ si ha $\rho(A)=\rho(A|B)=2$ quindi si hanno ∞^1 soluzioni e si trova facilmente

$$f^{-1}(1,1,1) = \{(x,x,1-3x)\}.$$

Per $h=-4$ si ha $\rho(A)=2$, $\rho(A|B)=3$ quindi il sistema è impossibile, $f^{-1}(1,1,1)=\emptyset$.

Ib

Assegnamo il generico endomorfismo g

$$\begin{cases} g(1,1) = (0,0) \\ g(1,0) = (a,b) \end{cases} \quad M(g) = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} \quad P(T) = T^2 - (a-b)T = 0 \quad T = 0, a-b.$$

Se $a \neq b$ si hanno due autovalori distinti quindi g è semplice. Se $a = b$ si ha l'autovalore $T = 0$ doppio quindi g risulta semplice solo se $\rho(M(g)) = 0$, cioè per $a = b = 0$.

II

1) La retta $\mathbf{r}$ ha punto improprio P_∞; consideriamo la generica retta per A ed imponiamo la condizione assegnata

$$\mathbf{s}: \begin{cases} x - 1 = m(z-1) \\ y - 1 = n(z-1) \end{cases} \quad S_\infty \equiv (m, n, 1, 0) \quad \cos \hat{\mathbf{rs}} = \frac{m+n}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quadrando si trova la relazione $m^2 - 4mn + n^2 + 1 = 0$; eliminando i parametri si trova l'equazione di Q

$$Q: (x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$$

Si verifica facilmente che Q è un cono con vertice in A. Tra i piani del fascio φ_z (di equazione $y = hx$) contenenti l'asse $\vec{z}$ quello passante per A, di equazione $x = y$ seca Q nella conica spezzata

$$\begin{cases} x = y \\ 2(x-1)^2 - (z-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ (\sqrt{2}(x-1) - (z-1))(\sqrt{2}(x-1) + (z-1)) = 0 \end{cases}$$

tutti gli altri piani del fascio secano Q in coniche irriducibili. Per caratterizzare queste coniche determiniamo la natura dei loro punti impropri:

$$\begin{cases} y = hx \\ t = 0 \\ (h^2 - 4h + 1)x^2 + z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad h^2 - 4h + 1 = 0 \quad h = 2 \pm \sqrt{3}$$

quidi avremo:

$h < 2 - \sqrt{3}$, $h > 2 + \sqrt{3}$: due punti impropri immaginari coniugati, ELLISSI;

$2 - \sqrt{3} < h < 2 + \sqrt{3}$: due punti impropri reali distinti, IPERBOLI;

$h = 2 \pm \sqrt{3}$: due punti impropri reali coincidenti, PARABOLE.

Per concludere osserviamo che il piano $x = 0$ (che si ottiene da φ_z per $h = \infty$) seca Q in una ellisse.
2) Ci poniamo sul piano $z = 0$. Nel fascio Φ ci sono due coniche spezzate distinte (caso della tangenza) che usiamo per determinarne l'equazione

$$\Phi: x(x-1) + hy(2x - y) = 0 \quad x^2 + 2hxy - hy^2 - x = 0.$$

Siccome conosciamo i punti base e le coniche spezzate del fascio (che si trovano per $h = 0, \infty$), caratterizziamo le coniche irriducibili mediante $|A| = -h - 1$.

$|A| > 0 \quad h < -1$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;

$|A| < 0 \quad h > -1$ IPERBOLI. Per $h = 1$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 + 2xy - y^2 - x = 0$;

$|A| = 0 \quad h = -1$ PARABOLA $\mathbf{p}: \ (x - y)^2 - x = 0$.

La parabola $\mathbf{p}$ ha punto improprio $(1, 1, 0)$; secando col fascio di rette ortogonali a questo punto e determinando la tangente otterremo il vertice

$$\begin{cases} y = h - x \\ (2x - h)^2 - x = 0 \end{cases} \qquad 4x^2 - (4h + 1)x + h^2 = 0 \quad \Delta = (4h + 1)^2 - 16h^2 = 8h + 1 = 0$$

quindi la retta tangente si trova per $h = -\frac{1}{8}$, il vertice è il punto $(\frac{1}{16}, -\frac{3}{16})$, l'asse ha equazione $4x - 4y - 1 = 0$.
3) Dalla matrice associata alla quadrica avremo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = -|A| = k(k - 1)$$

quindi per $k \neq 0, 1$ si hanno quadriche non degeneri con equazione ridotta del primo tipo e $\delta = 1$. Dal polinomio caratteristico di A

$$P(T) = (1 - T)(T^2 - (k + 1)T - k^2)$$

si vede facilmente che ci sono due autovalori concordi con δ e uno discorde, quindi le quadriche sono iperboloidi iperbolici. Nei casi particolari si trova:

$k = 0$ CILINDRO ELLITTICO $x^2 + y^2 - 1 = 0$ di vertice $(0, 0, 1, 0)$;

$k = 1$ CILINDRO ELLITTICO $x^2 + (y - z)^2 - 1 = 0$ di vertice $(0, 1, 1, 0)$