Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 28/09/10

Ia

Dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,-1)$, $v_3 = (0,0,1,1)$ siano $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ lo spazio da essi generato ed $f : V \to V$ l'endomorfismo dato dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(v_1) = (h-1, 1, 0, h-2) \\ f(v_2) = (2-h, 0, 0, 2-h) \\ f(v_3) = (h, 1, -1, h-2) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Determinare l'equazione cartesiana di V.
2) Studiare l'endomorfismo f al variare di h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3) Discutere la semplicità di f al variare di h; determinare una base di autovettori nei casi in cui essa esiste.

Ib

Si considerino il sottospazio delle matrici simmetriche

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$$

e l'endomorfismo $\varphi : T \to T$ dato da

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y & x-z \\ x-z & z-2y \end{pmatrix}.$$

Verificare se φ è un isomorfismo e se è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Determinare la circonferenza **c** passante per i punti $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,-1)$. Trovare il centro ed il raggio di **c**. Detto π il piano che contiene **c**, determinare il cilindro che ha generatrici ortogonali a π e contiene **c**.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio di coniche Φ di equazione

$$\Phi : \ x^2 + 2hxy + y^2 - 2x + 2 = 0$$

determinando in particolare i punti base e le coniche spezzate di Φ. Tra le ellissi di Φ caratterizzare quelle reali.
3) Studiare, al variare di h, la quadrica Q di equazione

$$Q : \ hx^2 + 2hxy + hy^2 + 2yz + hz^2 + 2x = 0\,.$$

SVOLGIMENTO

Ia

1) Con tecniche standard si trova subito $V = \{(x,y,z,t) \mid x - y + z - t = 0\}$.
2) Scegliamo in V la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$; cerchiamo le componenti dei vettori $f(v_1, f(v_2, f(v_3)$ rispetto ad $\mathscr{A}$:

$$f(v_1) = (h-1, 1, 0, h-2) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x, y, z, x-y+z) \quad \Rightarrow \quad x = h-1,\ y = 1,\ z = 0$$

$$f(v_2) = (2-h,0,0,2-h) = (2-h)(1,00,1) = (2-h)v_1 \quad \Rightarrow \quad x = 2-h,\ y=0,\ z=0$$

$$f(v_3) = (h,1,-1,h-2) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x,y,z,x-y+z) \quad \Rightarrow \quad x = h,\ y=1,\ z=-1$$

quindi

$$\begin{cases} f(v_1) = (h-1)v_1 + v_2 \\ f(v_2) = (2-h)v_1 \\ f(v_3) = hv_1 + v_2 - v_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h-1 & 2-h & h \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con } |M^{\mathscr{A}}(f)| = 2-h.$$

Se $h \neq 2$ f è un isomorfismo; per $h = 2$ si ottengono facilmente $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(0,1,0)_{\mathscr{A}} = \mathscr{L}(v_2)$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,0)_{\mathscr{A}}, (1,0,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1+v_2, v_1-v_3)$.
3) Per il polinomio caratteristico abbiamo

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-1-T & 2-h & h \\ 1 & -T & 1 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (-1-T)(T^2-(h-1)T+h-2) = 0 \quad \begin{array}{l} T=-1 \\ T=1 \\ T=h-2 \end{array}$$

quindi se $h \neq 1,3$ i tre autovalori sono distinti ed f è semplice. In questo caso gli autospazi si calcolano facilmente:

- $V_1 = \mathscr{L}(u_1 = (1,1,0)_{\mathscr{A}} = \mathscr{L}(v_1+v_2))$;
- $V_{-1} = \mathscr{L}(u_2 = (1,0,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3)$;
- $V_{h-2} = \mathscr{L}(u_3 = (h-2,1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((h-2)v_1 + v_2)$.

I tre autovettori trovati u_1, u_2, u_3 sono indipendenti per $h \neq 3$, quindi f risulta semplice anche per $h = 1$; invece per $h = 3$ f non è semplice (basta un semplice controllo).

Ib

Scegliendo in T la base

$$\mathscr{C} = \left[t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ t_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

avremo

$$\varphi(t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t_1 + t_2, \varphi(t_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2t_1 - 2t_3, \varphi(t_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -t_2 + t_3$$

ed otteniamo la matrice associata a φ

$$M^{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con determinante } 0$$

quindi φ non è un isomorfismo. Il polinomio caratteristico di φ è

$$P_\varphi(T) = -T(1-T)^2 = 0 \quad \begin{array}{l} T = 0 \\ T = 1 \quad \text{con molteplicità 2.} \end{array}$$

Naturalmente bisogna controllare la radice doppia; si verifica subito ch $\rho(M^{\mathscr{C}}(\varphi) - I) = 2$ quindi φ non è semplice.

1) Cominciamo col trovare il piano contenente $\mathbf{c}$: imponendo al piano generico $ax+by+cz+d=0$ il passaggio per i tre punti si ha

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \\ a-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-c \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \pi : x-y+z=0.$$

Imponiamo ora alla sfera generica $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ il passaggio per i tre punti

$$\begin{cases} a+b+d+2=0 \\ b+c+d+2=0 \\ a-c+d+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-c \\ d=-2 \end{cases} \Rightarrow S : x^2+y^2+z^2+ax-ay+az-2=0.$$

Ovviamente $\mathbf{c}=S\cap\pi$. Tra le sfere S che passano per i tre punti, quella cercata deve avere il centro appartenente al piano π $H \equiv (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \in \pi$, e si ottiene $a=0$. Quindi $\mathbf{c}$ ha centro O e raggio $\sqrt{2}$. Per determinare il cilindro consideriamo le equazioni di $\mathbf{c}$ ed intersechiamo la generica retta $\mathbf{r}$ ortogonale a π con questo piano. Imporremo che questo punto appartenga a $\mathbf{c}$, ottenendo l'equazione del cilindro.

$$\mathbf{c} : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x^2+xz+z^2-1=0 \end{cases} \qquad \mathbf{r}\cap\pi : \begin{cases} x+y=h \\ y+z=k \\ x-y+z=0 \end{cases} \qquad P\equiv(\frac{2h-k}{3}, \frac{h+k}{3}, \frac{2k-h}{3})$$

$$P\in\mathbf{c} \Rightarrow h^2-hk+k^2-3=0, \quad (x+y)^2-(x+y)(y+z)+(y+z)^2-3=0$$

2) Consideriamo la matrice associata alla generica conica del fascio

$$B=\begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} |B|=1-2h^2 \\ |A|=1-h^2 \end{matrix} \quad ; \quad |B|=0 \quad \text{per } h=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si osservi che abbiamo trovato due coniche spezzate che hanno equazione $2x=\pm i\sqrt{2}(y+\sqrt{2})$, quindi sono immaginarie. La terza conica spezzata si ottiene per $h=\infty$ ed ha equazione $xy=0$. Secando questa conica con unaltra conica del fascio (poniamo p.e. $h=0$) si ottengono i punti base (immaginari)

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2-2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow (0,\pm i\sqrt{2}); \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2-2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow (1\pm i, 0).$$

Per le coniche irriducibili di Φ si ha:

- $|A|>0$ per $-1<h<1$ ELLISSI. Per $h=0$ si ha la circonferenza $x^2+y^2-2x+2=0$ (che è immaginaria);
- $|A|<0$ per $h<-1$, $h>1$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
- $|A|=0$ per $h=\pm1$ PARABOLE di equazione $(x\pm y)^2-2x+2=0$.

Consideriamo le ellissi di Φ, cioè supponiamo $-1<h<1$. Gli autovalori della sottomatrice A sono $T=1\pm h>0$ mentre $\delta=\frac{2h^2-1}{1-h^2}$ risulta positivo per $-1<h<-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<h<1$. In

questi intervalli si hanno ellissi reali mentre per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ si hanno ellissi immaginarie.
3) Partiamo dalla matrice associata a Q

$$\begin{pmatrix} h & h & 0 & 1 \\ h & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = 1 - h^2 \\ \\ |A| = -h \end{array}$$

quindi per $h \neq \pm 1$ si hanno quadriche non degeneri. Per $h = \pm 1$ si vanno due coni di vertici $(0, \mp 1, 1)$; per $h = 0$ si ha il paraboloide iperbolico $yz + x = 0$; per $h = \infty$ si ottiene la quadrica $(x + y)^2 + z^2 = 0$ chiaramente spezzata in due piani immaginari coniugati, $x + y = \pm iz$. Per $h \neq 0$ si ottengono quadriche il cui polinomio caratteristico di A è $-T^3 + 3hT^2 + (1 - 2h^2)T - h$ e si verifica facilmente che ponendo i suoi coefficienti a segni alterni o tutti negativi in entrambi i casi il coefficiente di T^2 con il termine noto risulterebbero incompatibili. Quindi sono iperboloidi

- $|B| > 0 \Rightarrow -1 < h < 1$ IPERBOLOIDI IPERBOLICI;
- $|B| < 0 \Rightarrow h < -1$, $h > 1$, IPERBOLOIDI ELLITTICI.