Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 20/07/10

I

Sono assegnati il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ e l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ data dalle relazioni

$$\begin{cases} f(1,1,0,0) = (1, h, h-1, h+1) \\ f(1,0,-1,1) = (1,2,1,1) \\ f(0,1,1,1) = (2h, h, -h, h) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$. Verificare che $\operatorname{Im} f \subseteq V$ e precisare in quali casi $\operatorname{Im} f = V$.
2) Determinare il valore di h per cui $f^{-1}(1, h+1, 1, h) \neq \emptyset$. Per questo valore di h calcolare detta controimmagine

$$f^{-1}(1, h+1, 1, h) = \{v \in V \mid f(v) = (1, h+1, 1, h)\}$$

3) Verificare che f determina un endomorfismo $f' : V \to V$. Studiare f' al variare di h.
4) Discutere la semplicità di f' al variare di h. Determinare, quando ciò è possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{s} : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

verificare che esse sono complanari e determinare il piano che le contiene. Posto $A = \mathbf{r} \cap \mathbf{s}$ determinare un punto $B \in \mathbf{r}$ ed un punto $C \in \mathbf{s}$ in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in C ed abbia area $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
2)Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio ϕ di coniche di equazione

$$\phi : \ (1+h)x^2 + y^2 - hy - 1 - h = 0$$

determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate. Studiare la parabola $\mathbf{p}$ di ϕ determinandone asse, vertice, fuoco. Determinare il luogo dei centri di simmetria delle coniche di ϕ.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, la quadrica Q di equazione

$$Q : \ 2x^2 + y^2 + 2hyz + z^2 + 2hx - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1) Usando in V la base $\mathscr{A} = [v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,-1,1), v_3 = (0,1,1,1)]$ e nel codominio la base canonica avremo

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h \\ h & 2 & h \\ h-1 & 1 & -h \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h \\ h-2 & 0 & -3h \\ h-2 & 0 & -3h \\ h & 0 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{h \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h \\ h-2 & 0 & -3h \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h+2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq -1, 0$ f è iniettiva. Si verifica subito che $f(v_1) \in V$, $f(v_2) \in V$, $f(v_3) \in V$ quindi se $h \neq -1, 0$ avremo $\operatorname{Im} f = V$. Consideriamo i casi particolari
$h = -1$ $\quad \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,-1,-2,0),(1,2,1,1)) \subsetneq V, \quad \operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)_{\mathscr{A}}\};$
$h = 0$ $\quad \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,-1,1),(1,2,1,1)) \subsetneq V, \quad \operatorname{Ker} f = \{(0,0,z)_{\mathscr{A}}\}.$
2) Naturalmente $f^{-1}(1, h+1, 1, h) \neq \emptyset \Leftrightarrow (1, h+1, 1, h) \in \operatorname{Im} f$. Si verifica facilmente che ciò si verifica solo per $h = 1$ dato che l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ è uguale a quella di V ; per questo valore di h f è un isomorfismo e dovremo determinare $f^{-1}(1,2,1,1)$. Dalle assegnazioni sappiamo che $f^{-1}(1,2,1,1) = \{v_2\}$.
3) Abbiamo già osservato che per ogni $v \in V$ si ha $f(v) \in V$, quindi ponendo $f'(v) = f(v)$ si ha il richiesto endomorfismo. Continuando ad usare la base $\mathscr{A}$ di V, con facili calcoli avremo

$$\begin{cases} f'(v_1) = v_2 + hv_3 \\ f'(v_2) = v_1 + v_3 \\ f'(v_3) = hv_1 + hv_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1 & 0 & h \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |M^{\mathscr{A}}(f')| = h(h+1).$$

Lo studio di f' coincide con lo studio di f: per $h \neq -1, 0$ f' è un isomorfismo; per $h = -1$: $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_1 + v_2, v_1 + v_3)$ e $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3)$, per $h = 0$: $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_2, v_1 + v_3)$ e $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_3)$.
4) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f'

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & h \\ 1 & -T & h \\ h & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + (h^2 + h + 1)T + h^2 + h \quad \text{con} \quad P(-1) = 0$$

quindi abbassando di grado e risolvendo si hanno gli autovalori $T = -1, -h, h+1$. Se $h \neq 1, -2, -\frac{1}{2}$ questi autovalori sono distinti; in questo caso calcoliamo gli autospazi
$T = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & 1 & h \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V_{-1} = \{(x, -(1+h)x, x)\} \quad \text{con base } u_1 = (1, -1-h, 1)$$

$T = -h$

$$\begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 1 & h & h \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \quad V_{-h} = \{(h\rho, h\rho, -(1+h)\rho)\} \quad \text{con base } u_2 = (h, h, -h-1)$$

$T = h + 1$

$$\begin{pmatrix} -h-1 & 1 & h \\ 1 & -h-1 & h \\ h & 1 & -h-1 \end{pmatrix} \quad V_{h+1} = \{(x,x,x)\} \quad \text{con base } u_3 = (1,1,1)$$

Una semplice verifica mostra che i tre autovettori u_1, u_2, u_3 sono dipendenti per $h = -2, -\frac{1}{2}$, quindi per questi valori f' non è semplice; per $h = 1$ i tre autovettori sono indipendenti, quindi f' è semplice, come per altro si può facilmente verificare.

II

1) Intersecando le due rette si trova

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A \equiv (1,1,1)$$

Nel fascio di piani $\varphi_r : x - 1 + h(2y - z - 1) = 0$, imponendo il passaggio per un punto di $\mathbf{s}$ distinto da A, ad esempio per O, si trova $h = -1$; quindi il piano cercato ha equazione $x - 2y + z = 0$. Detti $B \equiv (1, \beta, 2\beta - 1) \in \mathbf{r}$ e $C \equiv (\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbf{s}$ due punti generici, la loro congiungente ha equazioni

$$BC : \frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{z-2\beta+1}{\alpha-2\beta+1} \quad \text{con} \quad (BC)_\infty \equiv (\alpha-1, \alpha-\beta, \alpha-2\beta+1, 0).$$

La retta $\mathbf{s}$ ha punto improprio $S_\infty \equiv (1, 1, 1, 0)$. Affinch il triangolo sia rettangolo in C deve accadere che $BC \perp \mathbf{s}$, applicando la condizione di ortogonalità si ottiene $\alpha = \beta$. I cateti del triangolo ABC hanno misura:

$$\overline{AC} = |\alpha - 1|\sqrt{3} \quad \overline{BC} = |\alpha - 1|\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{area}(ABC) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = (\alpha-1)^2 \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Imponendo che l'area abbia il valore richiesto si trova $\alpha - 1 = \pm 1$, quindi si hanno i valori $\alpha = 0$, $\alpha = 2$; col primo valore si hanno i punti $B \equiv (1, 0, -1)$, $C \equiv O$, col secondo valore si trovano i punti $B \equiv (1, 2, 3)$, $C \equiv (2, 2, 2)$.
2) Consideriamo la matrice associata alle coniche di ϕ:

$$B = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} \\ 0 & -\frac{h}{2} & -1-h \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -\frac{1}{4}(h+1)(h+2)^2 \\ |A| = 1+h \end{array}$$

quindi nel fascio ci sono due sole coniche spezzate distinte: $y(y+1) = 0$ per $h = -1$ e $(x+y+1)(x-y-1) = 0$ per $h = -2$. I punti base si trovano subito: $(\pm 1, 0)$ e $(0, -1)$ doppio. Si osservi che per $h = \infty$ si trova la parabola $\mathbf{p} : y = x^2 - 1$. Caratterizziamo le coniche irriducibili:

$|A| > 0$ per $h > -1$ ELLISSI. Per $h = 0$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$;

$|A| < 0$ per $h < -1$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;

$|A| = 0$ per $h = -1$ SPEZZATA. L'unica parabola del fascio è $\mathbf{p}$.

La parabola $\mathbf{p}$ ha asse parallelo all'asse $\vec{y}$, quindi si trovano facilmente: vertice $V \equiv (0, -1)$, asse $x = 0$, fuoco $F \equiv (0, -\frac{3}{4})$. Per rispondere all'ultima domanda, supponendo $h \neq -1$ dobbiamo eliminare il parametro dal sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{h}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{si trova la retta di equazione} \quad x = 0$$

mentre per $h = -1$ il sistema dei centri fornisce la retta $y = -\frac{1}{2}$. Complessivamente il luogo dei centri ha equazione $x(2y + 1) = 0$.
3) Dalla matrice associata a Q

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & h \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} |B| = (h^2-1)(h^2+2) \\ \\ |A| = 2(1-h^2) \end{array}$$

vediamo che le quadriche degeneri si hanno per $h = \pm 1$. Si tratta di due cilindri ellittici di equazione $2x^2 + y^2 \pm 2yz + z^2 \pm 2x - 1 = 0$, aventi vertici $(0, 1, \pm 1, 0)$. Per $h \neq \pm 1$ si hanno quadriche non degeneri e in particolare ellissoidi o iperboloidi. La sottomatrice A ha polinomio caratteristico

$$-T^3 + 4T^2 + (h^2 - 5)T + (2 - 2h^2) = 0.$$

In definitiva si ha applicando la regola dei segni di Cartesio:

$-1 < h < 1$: tre autovalori positivi, ELLISSOIDI REALI;

$h < -1,\ h > 1$: due autovalori positivi, IPERBOLOIDI IPERBOLICI.

Si osservi che per $h = \infty$ si ottiene il PARABOLOIDE IPERBOLICO $yz + x = 0$.