

Ia

Sono assegnati lo spazio vettoriale reale V avente base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ e l'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ dato dalle relazioni

$$\begin{cases} f(v_1) &= (h+1)v_1 + hv_2 + hv_3 \\ f(v_2) &= -v_1 + v_3 \\ f(v_3) &= hv_1 + hv_2 + (h-1)v_3 \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

- 1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- 2) Calcolare, al variare di h , la controimmagine

$$f^{-1}(v_1 + v_3) = \{x \in V \mid f(x) = v_1 + v_3\}$$

- 3) Discutere la semplicità di f al variare di h e determinare – quando ciò è possibile – una base di autovettori.

Ib

È assegnato l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dato da

$$\varphi(p(x)) = kp(x) - p'(x) \quad \text{con } k \text{ parametro reale.}$$

- 1) Studiare φ al variare di k determinando in ciascun caso nucleo ed immagine.
- 2) Verificare che φ non è semplice ed ha un solo autospazio. Calcolare questo autospazio.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Sono assegnate le rette

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad ; \quad t : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Verificare che esse sono mutuamente sghembe e determinare la generica retta u complanare con r , s e t . Trovare e studiare la quadrica Q luogo delle rette u .

- 2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio di coniche Φ di equazione

$$\Phi : x^2 + kxy + (1-k)y^2 + ky - 1 = 0.$$

Studiare l'iperbole equilatera Γ di Φ determinandone assi, asintoti, centro di simmetria.

- 3) Studiare, al variare del parametro reale k , le quadriche di equazione

$$x^2 + 2kxy + y^2 + z^2 - 2kz - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

Ia

1) Per studiare f determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$. Dai dati abbiamo:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & h \\ h & 0 & h \\ h & 1 & h-1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |M^{\mathcal{A}}(f)| = -2h$$

quindi per $h \neq 0$ f è un isomorfismo. Per $h = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Im } f = \mathcal{L}(v_1, v_3) \\ \text{Ker } f = \mathcal{L}(v_1 + v_2 + v_3) \end{array}.$$

2) Consideriamo la matrice completa

$$\begin{aligned} (A, B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & -1 & h & 1 \\ h & 0 & h & 0 \\ h & 1 & h-1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & -1 & h & 1 \\ h & 0 & h & 0 \\ 2h+1 & 0 & 2h-1 & 2 \end{array} \right)^{h \neq 0} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & -1 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \rho(A) = \rho(A, B) = 3, \quad f^{-1}(v_1 + v_3) = \{v_1 - v_3\}. \end{aligned}$$

Per $h = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = \rho(A, B) = 2, \quad \begin{cases} x = y + 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$$

$$f^{-1}(v_1 + v_3) = \{(y+1)v_1 + yv_2 + (y-1)v_3\}.$$

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f

$$\begin{vmatrix} h+1-T & -1 & h \\ h & -T & h \\ h & 1 & h-1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 2hT^2 + T - 2h = (2h-T)(T^2-1) = 0 \quad \begin{array}{l} T=1 \\ T=-1 \\ T=2h \end{array}$$

Per $h \neq \pm \frac{1}{2}$ f è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi

$$\begin{aligned} T=1 & \quad \begin{pmatrix} h & -1 & h \\ h & -1 & h \\ h & 1 & h-2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y=z \\ hx + (h-1)y = 0 \end{cases} \quad V_1 = \mathcal{L}((1-h)v_1 + hv_2 + hv_3) \\ T=-1 & \quad \begin{pmatrix} h+2 & -1 & h \\ h & 1 & h \\ h & 1 & h \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y=x \\ (h+1)x + hz = 0 \end{cases} \quad V_{-1} = \mathcal{L}(hv_1 + hv_2 - (h+1)v_3) \\ T=2h & \quad \begin{pmatrix} 1-h & -1 & h \\ h & -2h & h \\ h & 1 & -h-1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} \quad V_{2h} = \mathcal{L}(v_1 + v_2 + v_3). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che nei casi particolari $h = \pm \frac{1}{2}$, in corrispondenza ad un autovalore doppio si ottiene un autospazio di dimensione 1, quindi f non è semplice.

Ib

1) Posto $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ si ha

$$\varphi(p(x)) = ak + b kx + ckx^2 - b - 2cx = ak - b + (bk - 2c)x + ckx^2$$

quindi, scegliendo la base standard $\mathcal{E} = [1, x, x^2]$, si ottiene la matrice

$$M^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad |[M^{\mathcal{E}}(\varphi)]| = k^3$$

quindi per $k \neq 0$ si ha un isomorfismo. Per $k = 0$ si ottengono facilmente $\text{Im } \varphi = \mathcal{L}(1, x)$ e $\text{Ker } \varphi = \mathcal{L}(1)$.

2) Il polinomio caratteristico è $(k - T)^3$, quindi si ha l'autovalore triplo $T = k$. L'autospazio associato è $V_k = \mathcal{L}(1)$ che ha dimensione 1, quindi φ non è semplice.

II

1) Le rette complanari con r e con s si ottengono intersecando i generici piani dei fasci φ_r e φ_s ; richiediamo che queste rette siano complanari con t

$$\begin{cases} y = hz & h = \frac{y}{z} \\ x = k \\ k - hz - z = 0 \\ hz - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad z = \frac{k}{h+1} = \frac{1}{h}; \quad hk = h+1; \quad Q: xy - y - z = 0.$$

Si verifica facilmente che Q è un paraboloide iperbolico; basta osservare che $|B| = 1/16 > 0$, $|A| = 0$.

2) Consideriamo la matrice associata alle coniche del fascio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1-k & \frac{k}{2} \\ 0 & \frac{k}{2} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} |B| &= k-1 \\ |A| &= -\frac{1}{4}(k^2 + 4k - 4) \end{aligned}$$

quindi le coniche spezzate sono:

$$k = 1: (x+1)(x+y-1) = 0; \quad k = \infty: y(x-y+1) = 0.$$

I punti base si trovano facilmente intersecando queste due coniche: $(-1, 0)$ doppio, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Per caratterizzare le coniche irriducibili usiamo il segno di $|A|$:

$$|A| > 0 \quad -2 - 2\sqrt{2} < k < -2 + 2\sqrt{2} \quad \text{ELLISSI. Per } k = 0 \text{ circonferenza } x^2 + y^2 - 1 = 0;$$

$$|A| < 0 \quad k < -2 - 2\sqrt{2}, k > -2 + 2\sqrt{2} \quad \text{IPERBOLI. Per } k = 2 \text{ iperbole equilatera } \Gamma: x^2 + 2xy - y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$|A| = 0 \quad k = -2 \pm 2\sqrt{2} \quad \text{PARABOLE.}$$

L'iperbole Γ ha centro $C \equiv (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (si ricava dal sistema del centro) e punti impropri di coordinate $(-1 \pm \sqrt{2}, 1, 0)$; gli asintoti sono le congiungenti C con questi punti impropri, quindi hanno equazioni $x + \frac{1}{2} = (-1 \pm \sqrt{2})(y - \frac{1}{2})$. Le direzioni degli assi sono fornite dagli autospazi della sottomatrice A :

$$\begin{vmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & -1-T \end{vmatrix} = T^2 - 2 = 0 \quad T = \pm\sqrt{2} \quad V_{\sqrt{2}} = \mathcal{L}(1, \sqrt{2}-1); \quad V_{-\sqrt{2}} = \mathcal{L}(1, -\sqrt{2}-1)$$

quindi gli assi hanno coefficienti angolari:

$$m_\alpha = -\frac{a_{11}-\alpha}{a_{12}} = \sqrt{2} - 1$$

$$m_\beta = -\frac{a_{11}-\beta}{a_{12}} = -\sqrt{2} - 1$$

Quindi le equazioni degli assi sono: $(\pm\sqrt{2} - 1)(x + \frac{1}{2}) = y - \frac{1}{2}$.

3) Dalla matrice B associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -k & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} |B| &= (k^2 + 1)(k^2 - 1) \\ |A| &= 1 - k^2 \end{aligned}$$

quindi si hanno le seguenti quadriche degeneri

$$k = 1 \quad \text{CILINDRO di vertice } (1, -1, 0, 0)$$

$$k = -1 \quad \text{CILINDRO di vertice } (1, 1, 0, 0)$$

Si osservi che per $k = \infty$ si trova la quadrica $xy - z = 0$ che è un paraboloide iperbolico. Per $k \neq \pm 1$ si hanno quadriche la cui equazione ridotta è del primo tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \quad \text{con } \delta = k^2 + 1 > 0$$

Scrivere il polinomio caratteristico della sottomatrice A e studiare i segni dei coefficienti con la regola dei segni di Cartesio, quindi si hanno due casi

$$-1 < k < 1 \quad \text{ELLISSOIDI. Per } k = 0 \text{ si ha la sfera } x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$k < -1, k > 1 \quad \text{IPERBOLOIDI IPERBOLICI.}$$