Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 14/09/10

I

È assegnata l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mediante le assegnazioni

$$\begin{cases} f(1,1,0) & = & (h,h,0,0) \\ f(1,0,1) & = & (2-h,3-h,1,3) \\ f(1,1,1) & = & (1,1,0,1) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Determinare, al variare di h, le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$.
3) Determinare, al variare di h, i valori del parametro reale k per i quali la controimmagine $f^{-1}(1,k,1,k)$ non è vuota. Per questi valori di k determinare detta controimmagine.
4) Sia $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione data da $p(x,y,z,t) = (x,y,t)$. Verificare che l'endomorfismo $p \circ f = \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è semplice per ogni valore di h e verificare che esiste una base di autovettori indipendente dal parametro.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{t} : \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

determinare la generica retta $\mathbf{u}$ complanare con $\mathbf{r}$, con $\mathbf{s}$ e con $\mathbf{t}$. Determinare e studiare la quadrica Γ luogo delle rette $\mathbf{u}$.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio Φ delle coniche passanti per i punti $A \equiv (0,1)$, $B \equiv (1,1)$ e per ilpunto $C \equiv (2,2)$ con tangente di equazione $y - 2 = 0$. Determinare il luogo dei centri di simmetria delle coniche di Φ.
3) Studiare, al variare del parametro k, la quadrica Q di equazione

$$x^2 + 2kxy + z^2 - 2y - 2kz = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1) Con tecniche standard si trova facilmente la matrice associata ad f rispetto alla base canonica:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1-h \\ 2 & h-2 & 1-h \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1-h \\ 0 & -h & h-1 \\ 0 & -h & h-1 \\ 0 & -2h & 2h-1 \end{pmatrix} \overset{h\neq 0}{\to} \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1-h \\ 0 & -h & h-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq 0$ f è iniettiva ed $\operatorname{Im} f$ è generata dalle colonne di $M(f)$. Per $h = 0$ la matrice ha rango 2 e si trovano facilmente $Ker f = \{(x,x,0)\}$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,2,1,2),(1,1,0,1))$.
2) Per $h \neq 0$ calcoliamo l'equazione di $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ h-1 & h-2 & -1 & -2 \\ 1-h & 1-h & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ h & h & 0 & 0 \\ 1-h & 1-h & 0 & 1 \\ x-z & y-2z & 0 & t-2z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-y+z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z = 0\}$. Nel caso $h = 0$ con la stessa tecnica si trova

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z = y - t = 0\}.$$

3) Chiaramente bisogna richiedere che $(1, k, 1, k) \in \operatorname{Im} f$ e, per ogni valore di h, questo si verifica per $k = 2$. Per questo valore di k si ha:

$$h \neq 0 \quad f^{-1}(1, 2, 1, 2) = \{e_1\};$$

$$h = 0 \quad f^{-1}(1, 2, 1, 2) = \{(1 + x, x, 0)\}$$

4) Con facili calcoli si ha

$$\varphi(e_1) = p(1, 2, 1, 2) = (1, 2, 2);$$

$$\varphi(e_2) = p(h - 1, h - 2, -1, -2) = (h - 1, h - 2, -2);$$

$$\varphi(e_3) = p(1 - h, 1 - h, 0, 1) = (1 - h, 1 - h, 1)$$

quindi

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1-h \\ 2 & h-2 & 1-h \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } |M(\varphi)| = -h$$

Si ha che il polinomio caratteristico è

$$P(T) = -T^3 + hT^2 + T - h$$

Si vede facilmente che uno zero del polinomio è il numero 1, quindi scomponendo con Ruffini si trova il seguente risultato:

$$P(T) = (T - 1)(T + 1)(T - h)$$

e si trovano facilmente gli autovalori $T = \pm 1,\ h$. Per $h \neq \pm 1$ i tre autovalori sono distinti, quindi φ è semplice. Si trovano facilmente gli autospazi

$$V_1 = \mathscr{L}(u_1 = (1, 1, 1)), \quad V_h = \mathscr{L}(u_2 = (1, 1, 0)), \quad V_{-1} = \mathscr{L}(u_3 = (0, 1, 1)).$$

Siccome la base di autovettori $[u_1, u_2, u_3]$ trovata non dipende dal parametro h, l'endomorfismo è semplice anche nei casi particolari $h = \pm 1$.
Osservazione: dalle relazioni assegnate si ha $\varphi(1, 1, 0) = (h, h, 0)$ e $\varphi(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ cioè $T = 1, h$ sono autovalori di φ. Quindi erano comunque noti due zeri del polinomio caratteristico.

II

1) Siano $R \equiv (0, \beta, 0) \in \mathbf{r}$ ed $S \equiv (\alpha, \alpha, \alpha - 1) \in \mathbf{s}$ i punti generici. Affinchè la retta $\mathbf{u}$ sia complanare con $\mathbf{r}$ dobbiamo richiedere che $\mathbf{u}$ deve avere un punto comune con $\mathbf{r}$ (Idem la retta $\mathbf{u}$ deve essere complanare con $\mathbf{s}$). Quindi $\mathbf{u} = RS$. Per lo stesso motivo $\mathbf{u}$ deve intersecare $\mathbf{t}$, che è una retta impropria, cioè che il punto improprio $(RS)_\infty \in \mathbf{t}$. Dato che la retta $\mathbf{u}$ ha le seguenti equazioni

$$\mathbf{u} : \ \frac{x - 0}{\alpha - 0} = \frac{y - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{z}{\alpha - 1}$$

si ha che il suo punto improprio ha coordinate $(RS)_\infty \equiv (\alpha, \alpha - \beta, \alpha - 1, 0) \in \mathbf{t}$ per $\alpha - \beta = 0$. Quindi la retta $\mathbf{u} = RS$ ha equazioni

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\alpha - 1} \\ y = \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma : \ xy - yz - x = 0$$

Per studiare questa quadrica consideriamo la matrice ad essa associata

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = \frac{1}{16} \\ \\ |A| = 0 \end{array}$$

e siccome gli autovalori non nulli di A sono $T = \pm\sqrt{2}$, cioè hanno segno opposto, Γ è un paraboloide iperbolico.
2) Siamo nel caso della tangenza, quindi Φ contiene due sole coniche spezzate distinte, che possiamo usare per determinate il fascio. La prima conica è spezzata nella tangente e nella retta AB, quindi ha equazione $(y-2)(y-1) = 0$; la seconda è spezzata nelle rette AC e BC ed ha equazione $(x-y)(x-2y+2) = 0$.

$$\Phi : (x-y)(x-2y+2) + h(y-2)(y-1) = 0 \quad x^2 - 3xy + (h+2)y^2 + 2x - (2+3h)y + 2h = 0$$

Siccome conosciamo le coniche spezzate del fascio (che si trovano per $h = 0$ e $h = \infty$), studiamo le coniche irriducibili. Siccome $|A| = h - \frac{1}{4}$, avremo:

$|A| > 0$ per $h > \frac{1}{4}$, ELLISSI. Non ci sono circonferenze;

$|A| < 0$ per $h < \frac{1}{4}$, IPERBOLI. Per $h = -3$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 - 3xy - y^2 + 2x + 7y - 6 = 0$;

$|A| = 0$ per $h = \frac{1}{4}$, PARABOLA di equazione $(x - \frac{3}{2}y)^2 + 2x - \frac{5}{4}y - \frac{1}{2} = 0$.

Per determinare il luogo dei centri di simmetria dal sistema lineare associato alle prime due righe di B bisogna eliminare il parametro h

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}\,y + 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}\,x + (h+2)y - 1 - \frac{3}{2}\,h = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{il luogo ha equazione } 2x - 3y + 2 = 0.$$

3) Consideriamo la matrice associata a Q per calcolare gli invarianti ortogonali

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = (k^2-1)(k^2+1) \\ \\ |A| = -k^2 \end{array}$$

quindi le quadriche degeneri si hanno per $|B| = 0$ quindi $k = \pm 1$. In particolare si tratta di due coni aventi vertici $(1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$ rispettivamente. Se $k \neq \pm 1$, per $k = 0$ si ha $|A| = 0$: si trova il paraboloide e poichè ha $|B| = -1$ è ellittico di equazione $x^2 + z^2 - 2y = 0$. Per gli altri valori di k si trovano quadriche non degeneri che sicuramente non sono paraboloidi.

Osserviamo che il polinomio caratteristico di A è $-T^3 + 2T^2 + (k^2-1)T - k^2 = 0$, quindi i coefficienti non potranno mai essere a segni alterni. Ne segue che le quadriche saranno sicuramente iperboloidi. Avremo:

- $|B| > 0$ per $k < -1$, $k > 1$ IPERBOLOIDI IPERBOLICI;
- $|B| < 0$ per $-1 < k < 1$ IPERBOLOIDI ELLITTICI.

si osservi che per $k = \infty$ si trova il paraboloide iperbolico $xy - z = 0$.