# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Gennaio 2020

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

## I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & h & 2h+4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare $f$, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Verificare che per ogni valore di $h$ risulta $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$
3) Calcolare al variare di $h$ l'immagine del vettore $(2, -2, -1)$.
4) Studiare la semplicità di $f$.

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} z = 1 \\ x + y + z - 3 = 0, \end{cases}$$
verificare che esse sono complanari e determinare il punto $P = r \cap s$, il piano $\pi$ che le contiene e l'angolo $\widehat{rs}$.
2) Dati, nel piano $z = 0$, i punti $A = (1, -1)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, -2)$ e $D = (2, 2)$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A$, $B$, $C$ e $D$. Determinare la conica passante per i punti $A$, $B$, $C$, $D$ ed $E = (0, 1)$.
3) Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$hx^2 + y^2 - 2hxz - 4hx + 2y + 2 - h = 0.$$

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 18 Febbraio 2020

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$ e la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 + v_2 + (-h-7)v_3 \\ f(v_2) &= -v_1 + 4v_2 - 3v_3 \qquad\qquad \text{con } h \text{ parametro reale} \\ f(v_3) &= hv_3 \end{aligned}$$

1 Determinare $M^{\mathcal{B}}(f)$ e $M(f) = M^{\mathcal{E}}(f)$.

2 Studiare $f$, determinando in particolare, al variare di $h$, nucleo e immagine.

3 Calcolare al variare di $h$ l' immagine del vettore $(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$

4 Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h$.

5 Verificare che per ogni valore di $h$ risulta $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Sono date le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s}: \begin{cases} z = 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

Dopo aver verificato che queste due rette sono sghembe sia $R \in \mathbf{r}$ il punto generico; si determini la retta $\mathbf{t}$ passante per $R$ ortogonale ed incidente ad $\mathbf{s}$. Determinare $R$ in modo che $\mathbf{t}$ sia ortogonale ad $\mathbf{r}$.

2 Determinare e studiare, sul piano $z = 0$. il fascio $\phi$ di coniche che ha i punti base

$$(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (4, 2).$$

Specificare le equazioni delle coniche spezzate.

3 Determinare il cono che ha vertice $(2, 0, -1)$ e per direttrice l'iperbole equilatera di $\phi$.

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Aprile 2020

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

## I

Sono assegnati il sottospazio

$$V = \mathcal{L}(v_1 = (0,0,-1,1), v_2 = (-1,0,0,-3), v_3 = (-1,0,1,0))$$

dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(v_1) = (h,0,0,-h) \\ f(v_2) = (4h,0,0,0) \\ f(v_3) = (0,0,0,4) \end{cases}$$

con $h$ parametro reale.

1. Studiare f al variare di $h$ determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2. Sia assegnato il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \ x+y-z = t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Verficare se la somma $V+W$ è diretta.

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:
$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$
e il piano $\pi : x + 3y + 6z - 1 = 0$, mostrare che $r$ e $\pi$ sono paralleli e determinare la proiezione ortogonale di $r$ su $\pi$.

2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio $\phi$ delle coniche che passano per $A \equiv (1,0)$ con tangente $x + 2y - 1 = 0$, per $B \equiv (0,2)$ e per $O \equiv (0,0)$.

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Giugno 2020-turno I

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato uscire dalla connessione prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

---

**I**

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (2,-1,1)$, $v_3 = (1,1,0)$ e la base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(0,1,-1) &= (-h,0,1-h) \\ f(2,-1,1) &= (3h,0,h-1) \qquad\qquad \text{con } h \text{ parametro reale} \\ f(1,1,0) &= (h,h,1) \end{aligned}$$

1 Studiare $f$, determinando in particolare, al variare di $h$, nucleo e immagine.

2 Per il caso $h = 1$ verificare che $f$ è semplice e determinare una base di autovettori.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Sono date le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}, \quad \mathbf{s}: \begin{cases} y+2z=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases}$$

mostrare che non sono sghembe, determinare il piano $\pi$ che le contiene e calcolare il coseno dell'angolo individuato dalle due rette.

2 Determinare il cilindro contenente la conica $\Gamma: \begin{cases} 4x^2-y^2+2x-4y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e che ha vertice $(1,0,-1,0)$.

Determinare la natura della conica e del cilindro.

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Luglio 2020

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato uscire dalla connessione prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

---

## I

Siano $v_1 = (-1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_{3)}$. E' data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$\begin{cases} f(v_1) = (2-h, 0, 0, h) \\ f(v_2) = (2h-2, 0, h, h+1) \\ f(v_3) = (h, 1, h, h+1) \end{cases} \quad , h \in \mathbb{R}$$

Posto $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $p(x,y,z,t) = (x,y,z)$.

1 Studiare $f$, determinando in particolare, al variare di $h$, nucleo e immagine.

2 Determinare la matrice associata all'endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g = p \circ f$ e studiare la semplicità di $g$.

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Determinare le equazioni della retta $u$ incidente a $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$

e parallela al piano $\pi_1 : x + z - 2 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 3z + 5 = 0$

2 Determinare e studiare la totalità delle quadriche contenenti le due coniche coniche $\Gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y - z^2 = 0 \end{cases}$

e $\Gamma_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z^2 = 0 \end{cases}$

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 2 Settembre 2020

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato uscire dalla connessione prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

---

## I

Dato lo spazio vettoriale $V$ avente come base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (0, 1, 0, 1), v_3 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo $f : V \to V$ definito da:

$$M^{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} h & 0 & h-1 \\ h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1 Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h$, determinando, se possibile, una base di autovettori

2 Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y = z - t = 0\}$ determinare $f(W)$. In particolare determinare se esiste un valore di $h$ per il quale $f|_W$ induce un endomorfismo $f' : W \to W$.

## II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Dato il punto $A = (2, 1, 0)$ e la retta $\mathbf{r} : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ determinare la retta $s$ ortogonale e incidente la retta $r$ e passante per $A$. Determinare $d(A, r)$.

2 Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$

$$2hx^2 + y^2 - 2hxy - 6y + 9 = 0$$

determinando in particolare punti base e coniche spezzate. In particolare determinare e classificare la conica passante per $P_\infty = (1, 0, 0, 0)$.

# CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 18 Settembre 2020

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato uscire dalla connessione prima di aver consegnato definitivamente il compito.*

---

**I**

Sia dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (1,0,1) \\ f(0,1,-1) = (0,h,-h) \\ f(1,1,1) = (2,2,2) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1 Determinare la matrice associata ad $f$ rispetto la base $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ e studiare $f$.

2 Calcolare, al variare di $h$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,1)$.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Determinare il simmetrico del punto $P_0 = (1,-1,0)$ rispetto al piano $\pi : x - z = 0$.

2 Studiare la quadrica di equazione:

$$Q: \ x^2 + y^2 - 2yz + 2x + 1 = 0.$$

Determinare la natura della conica sezione di $Q$ con il piano $x - y = 0$.