CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 4 Luglio 2018

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato lo spazio vettoriale V avente base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$, con $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, -2)$, $v_3 = (1, 0, 0, -2)$. ed è assegnato il seguente endomorfismo $f: V \rightarrow V$ tale che :

$$\begin{aligned}f(0, 0, 1, 1) &= (h + 1, 1, 1, -2h - 3) \\f(0, 1, 0, -2) &= (h, 2, 2, -2 - 2h) \\f(1, 0, 0, -2) &= (h, 0, 0, -2h),\end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Determinare e studiare l'endomorfismo $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g|_V = f$ ed $g(e_4) = (0, 0, 0, 0)$. determinando $\text{Im } g$ e $\text{Ker } g$
4. Calcolare $g^{-1}(1, 0, -1, -1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Verificare che le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} y = 1 \\ x + y = 2z \end{cases}$$

sono sghembe. Determinare la retta u ortogonale e incidente entrambe le rette date.

2. Nel piano $z = 0$ si considerino i punti $A(-1, -1)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 2)$, $D(1, 1)$. Scrivere l'equazione della parabola p passante per i detti punti. Determinarne vertice e asse.
3. Determinare il cono contenente p e avente vertice $V = (0, 0, 1)$.
4. Studiare le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2xy + 2hxz + y^2 - 2y - h = 0$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$