CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Risoluzione della prova scritta di **Geometria**- 30 Gennaio 2008

I

Sono assegnati l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle relazioni

$$\begin{array}{l} f(1,1,0,0) = (1,3,2h-1,3) \\ f(1,1,1,0) = (1,2+h,2h+1,2) \\ f(0,1,1,0) = (0,h,1,0) \\ f(0,0,1,1) = (0,-2,1-h,-2) \end{array}$$

con h parametro reale ed il sottospazio

$$V = \{(x,y,z,t) \mid y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h.

2) Trovare $\bigcap_{h\in\mathbb{R}} Im\ f$, $\bigcap_{h\in\mathbb{R}} Ker\ f$.

3) Determinare il valore di h per cui f induce un endomorfismo $f' : V \to V$. Verificare che f' è semplice e determinare una base di autovettori.

4) Si consideri il sottospazio $W = \mathcal{L}(0,h,1,0)$. Determinare, al variare di h, le controimmagini

$$f^{-1}(0,h,1,0);\ \ f^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^4.$$

(Si ricordi che $f^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^4 |\ f(v) \in W\}$.)

Risoluzione

1) Dal sistema

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (1,3,2h-1,3) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (1,2+h,2h+1,2) \\ f(e_2) + f(e_3) = (0,h,1,0) \\ f(e_3) + f(e_4) = (0,-2,1-h,-2) \end{cases}$$

risulta

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & h-1 & -1-h \\ 2h & -1 & 2 & -1-h \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se $h \neq 0, -1$ si ha che il rango della matrice è 4, quindi dimIm f=4, dimKer f=0 $\Rightarrow$ $Imf = \mathbb{R}^4$ e $Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Se $h = 0$ si ha che il rango della matrice è 3, quindi dimIm f=3, dimKer f=1 $\Rightarrow$ $Imf = \mathcal{L}((1,2,0,2),(0,1,-1,1),(0,-1,2,-1))$ e $Ker\ f = \{(0, \frac{3}{2}z, z, \frac{1}{2}z)\}$. Base del Ker f è $\mathcal{A} = \{(0,3,2,1)\}$.

Se $h = -1$ si ha che il rango della matrice è 3, quindi dimIm f=3, dimKer f=1 $\Rightarrow$ $Imf = \mathcal{L}((1,2,-2,2),(0,1,-1,1),(0,-2,2,-1))$ e $Ker\ f = \{(0,2z,z,z)\}$. Base del Ker f è $\mathcal{A}' = \{(0,2,1,1)\}$.

2) Se $h \neq 0, -1$ si ha che $Imf = \mathbb{R}^4$ e $Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Se $h = 0$ si ha che $Imf = \mathcal{L}((1,2,0,2),(0,1,-1,1),(0,-1,2,-1))$ avente come equazione cartesiana $t - y = 0$ (si ricordi che per trovare l'equazione cartesiana bisogna imporre che il rango della seguente matrice non deve essere massimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Se $h = -1$ si ha che $Imf = \mathcal{L}((1,2,-2,2),(0,1,-1,1),(0,-2,2,-1))$ avente come equazione cartesiana $y + z = 0$ (si ricordi che per trovare l'equazione cartesiana bisogna imporre che il rango della seguente matrice non deve essere massimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\bigcap_{h\in\mathbb{R}} Im\ f = \begin{cases} t = y \\ z = -y \end{cases} \qquad \bigcap_{h\in\mathbb{R}} Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$$

3) Il valore di h per cui f induce un endomorfismo su V è $h = 1$: si prenda una base di V $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3.\}$ dove $v_1 = (1,0,0,0)$,$v_2 = (0,1,1,0)$,$v_3 = (0,0,0,1)$ e si calcolano le immagini di questi vettori:
-) $f(v_1) = f(e_1) = (1,2,2h,2) \in V$ se e solo se la seconda componente è uguale alla terza componente, cioè h=1
-) In modo del tutto analogo $f(v_2) = f(e_2) + f(e_3) = (0,h,1,0) \rightarrow h = 1$.
-) Infine $f(v_3) = f(e_4) = (0,-1-h,-1-h,-1) \in V\ \forall h \in \mathbb{R}$.
Risposra: f induce un endomorfismo su V per $h = 1$.
Scriviamo la matrice associata a tale endomorfismo su V:
$f'(v_1) = (1,2,2,2) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x,y,y,z)$ allora la prima colonna della matrice è data dal vettore di componenti (1,2,2) rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V.In modo analogo si trova $f'(v_2) = (0,1,0)_{\mathcal{B}}$, $f'(v_3) = (0,-2,-1)_{\mathcal{B}}$. Quindi per lo studio della semplicita' bisogna calcolare il polinomio caratteristico sottraendo T dalla diagonale principale della matrice dell'endomorfismo f',

$$\begin{pmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 2 & 1-T & -2 \\ 2 & 0 & -1-T \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (1-T)^2(-1-T)$.Ne segue che $T = 1$ con $m_1 = 2$ e $T = -1$ con $m_{-1} = 1$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1: $dim\ V_1 = 3 - \rho(M^{\mathcal{B}}(f') - I) = 3 - 1 = 2$ quindi l'endomorfismo è semplice. Calcoliamo una base di autovettori:

$$V_1 = Kerf_1 = \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \qquad V_{-1} = Kerf_{-1} = \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

da cui una base di autovettori è formata da $u_1 = (1,0,1)_{\mathcal{B}} = v_1 + v_3 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}} = v_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,1,1)_{\mathcal{B}} = v_2 + v_3 = (0,1,1,1)$

4) $f^{-1}(0,h,1,0)$ è noto dal testo ed è (0,1,1,0) ; invece per calcolare $f^{-1}(W)$ poichè $W = \{(0,hz,z,0)\}$ significa che prima e quarta componente sono nulle e che la seconda componente è uguale a h-volte la terza. Si ricordi che dobbiamo trovare quei vettori di $\mathbb{R}^4$ del tipo (x,y,z,t) tali che la loro immagine (quindi la legge f(x,y,z,t)=..) deve appartenere a W. Sapendo che

$$f(x,y,z,t) = M(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x, 2x+y+(h-1)z-(h+1)t, (2h-1)x-y+2z-(h+1)t, 2x+y-z-t)$$

allora la controimmagine di W è data dalla risoluzione del sistema

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = z + t \\ (h^2+h)t = 0 \end{array}$$

da cui se h=0,-1 $\Rightarrow f^{-1}(W) = \{(0, z+t, z, t\}$, se $h \neq 0, -1 \Rightarrow f^{-1}(W) = \{(0, y, y, 0\}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

5) Determinare la retta t passante per il punto O, parallela al piano $2x - y - z = 0$ ed ortogonale alla retta di equazione $x - 2y + 3z + 5 = x + 3y - 2z = 0$.

6) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ passanti per $(1,-1,0)$, $(2,-4,0)$ e tangenti in O all'asse x.

7) Detta γ l'iperbole equilatera di ϕ, determinare e studiare le quadriche Q che contengono γ ed hanno la seguente conica all'infinito : $t = x^2 - y^2 - 3xy = 0$.

Risoluzione

1) La retta t passante per O è del tipo $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$. Essa deve essere parallela al piano di parametri direttori $(2,-1,-1) \Rightarrow (l,m,n)\cdot(2,-1,-1) = 0 \Rightarrow 2l - m - n = 0$. Inoltre i parametri direttori della retta sono $(-1,1,1) \Rightarrow (l,m,n)\cdot(-1,1,1) = 0 \Rightarrow -l + m + n = 0$. Dal sistema

$$\begin{cases} 2l - m - n = 0 \\ -l + m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = -n \end{cases}$$

si ottiene la retta t di equazioni $x = y + z = 0$.

2) r_{AB} : $3x + y - 2 = z = 0$, r_{AO} : $x + y = z = 0$, r_{BO} : $2x + y = z = 0$. Il fascio di coniche ϕ ottenuto usando la tangenza in O è $y(3x+y-2) + \lambda(x+y)(2x+y) = z = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda = 0$ si ottiene la conica spezzata $y(3x+y-2) = z = 0$. Se $\lambda \neq 0$ coniche non degeneri.
$detB = -2\lambda$, $detA = (1+\lambda)(-\frac{\lambda}{4} - \frac{9}{4})$. Qundi:
-)$\lambda = -1, -9$ Parabole
-)$-9 < \lambda < -1$ Ellissi
-)$\lambda < -9$ $\lambda > -1$ Iperboli.

3) In particolare iperbole equilatera si ottiene quando la $Tr(A) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.

$$\gamma: \ x^2 - y^2 - 3xy + 3y = z = 0.$$

Il fascio di quadriche contenenti γ è

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 - 3xy + 3y = 0$$

Intersechiamo tale quadriche con il piano improprio $t = 0$

$$\begin{cases} z(ax + by + cz + dt) + x^2 - y^2 - 3xy + 3yt = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

e uguagliamo (a meno di un fattore di proporzionalità) la conica sezione ottenuta $axz + byz + cz^2 + x^2 - y^2 - 3xy = 0$ con la conica all'infinito data nel testo:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{Q} : x^2 - y^2 - 3xy + 3y + dz = 0 \ \forall d \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo il $detB = \frac{13}{16}d^2$.Quindi $detB = \frac{13}{16}d^2 > 0 \ \forall d \neq 0$.Se $d = 0$, essendo $detA = 0$ si tratta di cilindro iperbolico.Se $d \neq 0$, essendo $detA = 0$ si tratta di paraboloidi iperbolici.