CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Risoluzione della prova scritta di **Geometria**- 27 Febbraio 2008

I

E' assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito dalla seguente matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-h & h+1 \\ 3 & -2 & 1-h & h-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h & h \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso una base di $Im\ f$, una base di $Ker\ f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Verificare che f è semplice e trovare una base di autovettori indipendente dal parametro.

3) In $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y + t = 0\}$. Determinare $f(V)$ e la sua dimensione.

4) Data l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $g(x, y, z, t) = (x-y, x+z+t, z)$ determinare $(g \circ f)(x, y, z, t)$.

Risoluzione

1) Il determinante di $M(f)$ si calcola facilmente applicando il primo teorema di Laplace alla terza riga:

$$det(M(f)) = A_{33} = det \begin{pmatrix} -1 & 0 & h+1 \\ 3 & -2 & h-1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = 2h.$$

$\Rightarrow$ Se $h \neq 0$ si ha che il rango della matrice è 4, quindi $dimImf = 4, dimKerf = 0$ $\Rightarrow$ $Imf = \mathbb{R}^4$ e $Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Se $h = 0$ si ha che il rango della matrice è 3, quindi $dimImf = 3$, $dimKerf = 1 \Rightarrow$ $Imf = \mathcal{L}((-1, 3, 0, 0), (0, -2, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$ e $Ker\ f = \{(x, x, 0, x)\}$. Base del Ker f è $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0, 1)\}$. Le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$ nel caso $h \neq 0$ sono ovvie: $Imf = \mathbb{R}^4 \Rightarrow$ nessuna equazione cartesiana, e $Kerf$ è individuato da $x = y = z = t = 0$.
Le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$ nel caso $h = 0$ sono:

a) Imf (si ricordi che per trovare l'equazione cartesiana bisogna imporre che il rango della seguente matrice non deve essere massimo)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow det = 0 \rightarrow -2(-t+z) = 0 \rightarrow z - t = 0.$

b) $Kerf$, le equazioni cartesiane sono date da

$$Kerf : \begin{cases} x - t = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2) Lo studio della semplicita' consiste nel calcolare come prima cosa il polinomio caratteristico sottraendo T dalla diagonale principale della matrice dell'endomorfismo f,

$$\begin{pmatrix} -1-T & 0 & 1-h & h+1 \\ 3 & -2-T & 1-h & h-1 \\ 0 & 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-h & h-T \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (1-T)(-1-T)(-2-T)(h-T).$
Ne segue che gli autovalori sono $T = 1$, $T = -1$, $T = -2$, $T = h$.
Calcoliamo una base di autovettori indipendente dal parametro h.

$$V_1 = Kerf_1 : \begin{cases} -2x + (1-h)z + (h+1)t = 0 \\ 3x - 3y + (1-h)z + (h-1)t = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow h \neq 1 \rightarrow V_1 = Kerf_1 : \begin{cases} x = z \\ y = z \\ t = z \end{cases}$$

da cui una base di esso è formata da $u_1 = (1, 1, 1, 1)$.

$$V_{-1} = Kerf_{-1} : \begin{cases} (1-h)z + (h+1)t = 0 \\ 3x - y + (h-1)t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow h \neq -1 \rightarrow V_{-1} = Kerf_{-1} : \begin{cases} y = 3x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

da cui una base di esso è formata da $u_2 = (1, 3, 0, 0)$.

$$V_{-2} = Kerf_{-2} : \begin{cases} x + (h+1)t = 0 \\ 3x + (h-1)t = 0 \\ z = 0 \\ (h+2)t = 0 \end{cases} \rightarrow h \neq -2 \rightarrow V_{-2} = Kerf_{-2} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

da cui una base di esso è formata da $u_3 = (0, 1, 0, 0)$.

$$V_h = Kerf_h : \begin{cases} (-1-h)x + (1-h)z + (h+1)t = 0 \\ 3x - (2+h)y + (1-h)z + (h-1)t = 0 \\ (1-h)z = 0 \end{cases} \rightarrow h \neq \pm 1, h \neq -2 \rightarrow$$

$$V_h = Kerf_h : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui una base di esso è formata da $u_4 = (1, 1, 0, 1)$. da cui una base di autovettori con $h \neq \pm 1, h \neq -2$ è formata da u_1, u_2, u_3, ed u_4.

3) Scritta una base di V calcoliamo le immagini di questi vettori- base verificando la loro dipendenza o indipendenza lineare:
Step 1. Base di $V = \{(x, x+t, z, t)\}$: $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,1)\}$
Step 2. Calcoliamo le immagini:

$$f(1,1,0,0) = M(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(0,0,1,0) = M(f)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-h \\ 1-h \\ 1 \\ 1-h \end{pmatrix}$$

$$f(0,1,0,1) = M(f)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Step 3. Controlliamo se sono l.i.: sappiamo che per $h \neq 0$ essendo f un isomorfismo le immagini di vettori l.i. sono ancora l.i. $\Rightarrow dim f(V) = 3$; se $h = 0$ menttendoli per riga in una matrice otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango uguale 3 $\rightarrow l.i. \rightarrow dim f(V) = 3$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

4) $g \circ f(x,y,z,t) = g(f(x,y,z,t) = g(-x+(1-h)z+(h+1)t, 3x-2y+(1-h)z+(h-1)t, z, (1-h)z+ht) = (-4x+2y+2t, -x+(3-2h)z+(2h+1)t, z)$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

5) Dato il punto A=(-2,0,0) determinare il luogo delle rette passanti per A che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$. Verificare che è un cono e trovare il suo vertice.

6) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ dato dalla segeunte equazione

$$(1+\lambda)x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$$

Trovare i punti base e le coniche spezzate.

7) Detta γ la circonferenza del fascio determinare la sfera Γ contenente γ e avente come centro $C = (0,0,2)$.

Risoluzione

1) Scriviamo l'equazione della retta generica passante per un punto:

$$\frac{x-(-2)}{l} = \frac{y-0}{m} = \frac{z-0}{n}$$

avente parametri direttori $(l, m, n) \rightarrow m = \frac{y}{x+2}l, n = \frac{z}{x+2}l$. Inoltre i parametri direttori dell'asse z sono $(0, 0, 1)$. Usando la definizione di prodotto scalare $v \cdot v' = |v||v'|cos\widehat{vv'} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{z}{x+2}}{\sqrt{1+\frac{y^2}{(x+2)^2}+\frac{z^2}{(x+2)^2}}} \rightarrow$
la quadrica cercata ha equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 4 = 0$.
Essa è un cono (detB=0, detA=-1) di vertice $(-2, 0, 0)$.

2) Scriviamo la matrice associata al fascio

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$detB = (\lambda + 1)(\lambda - 1) - \lambda^2 = -1,\ detA = \lambda + 1.$
Quindi tutte le coniche del fascio sono irriducibili tranne una, esattamente c' una sola conica spezzata contata tre volte. Essa è la conica che non compare nel fascio con un solo parametro (si trascura quando si passa da due parametri ad uno):
$\lambda = \frac{h}{\mu}, \mu \neq 0 \rightarrow x^2 + \frac{h}{\mu}x^2 + y^2 - 2\frac{h}{\mu}x + \frac{h}{\mu} - 1 = 0 \rightarrow \mu(x^2 + y^2 - 1) + h(x^2 - 2x + 1) = 0 \rightarrow \mu(x^2 + y^2 - 1) + h(x - 1)^2 = 0 \rightarrow$
la conica spezzata è $(x - 1)^2 = 0$.

Se $detA = \lambda + 1 > 0 \rightarrow \lambda > -1 \rightarrow$ellissi.
Se $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow$circonferenza. Se $detA = \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow$parabola.
Se $detA = \lambda + 1 < 0 \rightarrow \lambda < -1 \rightarrow$iperboli.
I punti base sono dati dall'intersezione di due coniche del fascio:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

esso è contato 4 volte $\rightarrow$ le coniche si iperosculano.

3) La circonferenza del fascio si ottiene per $\lambda = 0 \rightarrow$

$$\gamma : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

la quadrica contenente la circonferenza è

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + cz^2 + axz + byz + dz - 1 = 0$$

affiche è sfera deve accadere $a_{11} = a_{22} = a_{33}, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{23} = 0 \rightarrow c = 1, a = 0, b = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + dz - 1 = 0$. Imponiamo che il suo centro sia $(0, 0, 2) \rightarrow -\frac{d}{2} = 2 \rightarrow d = -4 \rightarrow$ la sfera Γ ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$$