CdL in Ingegneria Gestionale e CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Risoluzione della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria- Compito A-**
9 Luglio 2008

I

Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0,-1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,2,0)\}$ ed i vettori $w_2 = (-1,-1,1)$, $w_3 = (1,0,0)$.

1) Studiare l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalle assegnazioni
$f(v_1) = hv_1$
$f(v_2) = hv_1 + 2w_2$
$f(v_3) = 2hv_1 + 2w_3$
dove h è un parametro reale.

2) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ e studiare la semplicità di f al variare di h.

3) Sia $i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'immersione definita da $i(x,y,z) = (x,y,z,0)$. Sia $g = i \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Studiare l'applicazione lineare g scrivendo la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche $M(g)$.

4) Dato il vettore $u = (1,0,0,0)$ si studi la controimmagine $g^{-1}(u)$ al variare di h.

Risoluzione

1) Il primo passo è scegliere una base di $\mathbb{R}^3$: una conveniente potrebbe essere la base $\mathcal{B}$ data nel testo, oppure direttamente la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Se scegliamo la base $\mathcal{B}$ e andiamo a scrivere la matrice associata $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ dobbiamo intanto scrivere w_2 come c.l. dei vettori della base $\mathcal{B}$ ($w_2 = v_2 - v_3$) e poi sostituire dove tale vettore compare, i.e. in $f(v_2) = hv_1 + 2w_2 == hv_1 + 2v_2 - 2v_3 = (h, 2, -2)_{\mathcal{B}}$. In modo analogo dobbiamo scrivere w_3 come c.l. dei vettori della base $\mathcal{B}$ ($w_3 = 2v_1 + 2v_2 - v_3$) e poi sostituire dove tale vettore compare, i.e. in $f(v_3) = 2hv_1 + 4v_1 + 4v_2 - 2v_3 = (2h+4, 4, -2)_{\mathcal{B}}$.
Quindi

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & h & 2h+4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ risulta:

$$det(M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) = 4h.$$

$\Rightarrow$ Se $h \neq 0$ si ha che il rango della matrice è 3, quindi $dimImf = 3, dimKerf = 0 \Rightarrow \ Imf = \mathbb{R}^3$ e $Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Se $h = 0$ si ha che il rango della matrice è 2, quindi $dimImf = 2$, $dimKerf = 1 \Rightarrow \ Imf = \mathcal{L}((0,2,-2)_{\mathcal{B}} = 0v_1 + 2v_2 - 2v_3 = (-2,-2,2), (4,4,-2)_{\mathcal{B}} = 4v_1 + 4v_2 - 2v_3 = (2,0,0))$ e $Ker\ f = \{(x,0,0)_{\mathcal{B}}\} = \{(x,0,-x)\}$. Base del Ker f è $\mathcal{A} = \{(1,0,-1)\}$.

2) Lo studio della semplicita' consiste nel calcolare come prima cosa il polinomio caratteristico sottraendo T dalla diagonale principale della matrice dell'endomorfismo f,

$$\begin{pmatrix} h-T & h & 2h+4 \\ 0 & 2-T & 4 \\ 0 & -2 & -2-T \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (h-T)(2-T)(-2-T)+8(h-T) = (h-T)[-(2-T)(2+T)+8] = (h-T)(T^2+4)$.
Ne segue che di autovalori appartenenti al campo $\mathbb{R}$ c'è solo $T_1 = h$ da cui l'autospazio associato è $V_h = \{(x,0,0)\}_{\mathcal{B}}\} = \{(x,0,-x)\}$. Invece le altre due soluzioni del polinomio caratteristico $(\pm 2i)$ appartengono al campo complesso e ovviamente gli autovettori associati ad autovalori complessi sono a loro volta complessi e quindi ne omettiamo il calcolo.
N.B.Un polinomio di grado n pu non avere radici reali mentre ha sempre n radici complesse non necessariamente distinte. Quindi una matrice quadrata di ordine n ha sempre n autovalori complessi non necessariamente distinti e pu non avere n autovalori reali.

3) Per scrivere la matrice associata all'applicazione lineare composta g rispetto alle basi canoniche dobbiamo prima conoscere la matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alle basi canoniche:

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_3) = (h,0,-h) \\ f(e_2) + f(e_3) = (h,0,-h) + (-2,-2,2) = (h-2,-2,2-h) \\ f(e_1) + 2f(e_2) = 2h(1,0,-1) + (2,0,0) = (2h+2,0,-2h) \end{cases} \to M(f) = \begin{pmatrix} 2h-6 & 4 & h-6 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4-2h & -2 & 4-h \end{pmatrix}$$

$$M(g) = M(i)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2h-6 & 4 & h-6 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4-2h & -2 & 4-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h-6 & 4 & h-6 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4-2h & -2 & 4-h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo significa che lo studio della g è del tutto analogo a quello della f. Ricordiamo che $M(f)$ e $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ sono simili e che due matrici simili hanno lo stesso rango, determinante e traccia. Diciamo quindi che rango, determinante e traccia sono invarianti per similitudine.

4) Per studiare la controimmagine del vettore u dobbiamo risolvere al variare di h il seguente sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è $M(f)$ il cui determinante lo conosciamo dato che l'abbiamo calcolato nel punto 1)(det(M(f))=4h):

$$\begin{pmatrix} 2h-6 & 4 & h-6 \\ -4 & 2 & -4 \\ 4-2h & -2 & 4-h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (2h-6)x + 4y + (h-6)z = 1 \\ -4x + 2y - 4z = 0 \\ (4-2h)x - 2y + (4-h)z = 0 \end{cases}$$ se $det(M(f) \neq 0 \to h \neq 0 \to$ la soluzione è unica e la si potrebbe calcolare con il teorema di Cramer: $(-\frac{1}{2},1,1) \to g^{-1}(u) = \{(-\frac{1}{2},1,1)\}$ se Se $det(M(f) = 0 \to h = 0 \to$ per il teorema di Rouche-Capelli avremmo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni:

$$\begin{cases} -6x + 4y - 6z = 1 \\ -4x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2 \end{cases} \to g^{-1}(u) = \{(1-z,2,z)\}$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare e studiare la quadrica Q luogo dei punti dello spazio che sono equidistanti dall'origine e dal piano α di equazione $x-y+1=0$.

2) Trovare l'iperbole equilatera γ del piano $z=0$ avente per asintoto la retta $x-y=0$ e passante per i punti $(1,2)$, e $(0,-1)$. In particolare trovare una sua forma canonica indicando le formule di passaggio dal vecchio al nuovo sistema di riferimento.

3) Date la coniche

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ y^2+xy-x=0 \end{cases} \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} x-y+z=0 \\ y^2-xy-x=0 \end{cases}$$

determinare e studiare il fascio ϕ delle quadriche contenenti le due coniche.

Risoluzione

1) Dato un punto generico dello spazio $P=(x,y,z)$ imponiamo che la sua distanza dall'origine $(d(P,O)=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ sia eguale alla sua distanza dal piano dato nel testo $(\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}})$, quindi

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$

elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$x^2+y^2+z^2=\frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{2}$$

da cui facendo i calcoli si ottiene

$$x^2+y^2+2z^2+2xy-2x+2y-1=0$$

La matrice B associata a tale quadrica

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la terza riga per applicare il primo teorema di Laplace

$$detB=-8 \rightarrow detB<0.$$

In modo analogo calcoliamo il $detA$

$$detA=0 \rightarrow PARABOLIODE\ ELLITTICO$$

2) Per trovare l'iperbole equilatera dobbiamo prima ricordare che l'iperbole è tangente nei punti impropri dei suoi asintoti. Il testo fornisce un asintoto avente punto improprio $P^\infty = (1,1,0)$ che quindi diventa un punto di tangenza. Il fascio quindi usa il fatto che abbiamo un punto di tangenza e due punti distinti:
retta passante per i due punti dati nel testo ha equazione : $3x - y - 1 = 0$
retta passante per $P^\infty = (1,1,0)$ e per (1,2) ha equazione : $x - y + 1 = 0$
retta passante per $P^\infty = (1,1,0)$ e per (0,-1) ha equazione : $x - y - 1 = 0$
quindi il fascio di coniche ha equazione

$$(x-y)(3x-y-1) + \lambda(x-y+1)(x-y-1) = 0$$

al variare di h parametro reale. Inoltre desideriamo avere in questo fascio un'iperbole equilatera, i.e. la $Tr(A) = 0 \to 2h + 4 = 0 \to h = -2$.L'iperbole equilatera ha equazione:

$$x^2 - y^2 - x + y + 2 = 0$$

Notiamo che manca il termine a_{12} quindi si parla solo di traslazione che porta l'origine nel centro di simmetria.
Calcoliamo il centro di simmetria mediante il sistema lineare

$$\begin{cases} x_C - \frac{1}{2} = 0 \\ -y_C + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_C = \frac{1}{2} \\ y_C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le formule di traslazione sono allora

$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sostituendo esse nell'equazione dell'iperbole equilatera si ottiene la sua forma canonica

$$X^2 - Y^2 + 2 = 0$$

3) Quadrica contenente la conica Γ_1

$$(x+y-z)(ax+by+cz+d) + y^2 + xy - x = 0$$

affichè essa contiene pure la seconda conica deve accadere che quando la seziono con il piano della seconda conica si deve trovare esattamente la seconda conica. Allora sezioniamo

$$\begin{cases} (x+y-z)(ax+by+cz+d) + y^2 + xy - x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} (x+y-z)(ax+by+cz+d) + y^2 + xy - x = 0 \\ z = y - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a-c)x^2 + (2c+2b+1)xy + y^2 + (2d-1)x = 0 \\ z = y - x \end{cases}$$

Tale conica sezione deve coincidere con $\Gamma_2 \to$

$$\begin{cases} 2a - 2c = 0 \\ 2c + 2b + 1 = -1 \\ 2d - 1 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} a = c \\ b = -1 - c \\ d = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella quadrica contente la prima conica si ottiene la quadrica generica

$$cx^2 - cy^2 - cz^2 + (1 + 2c)yz - x = 0$$

con c parametro reale. La matrice associata al fascio di quadriche

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -c & \frac{1+2c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+2c}{2} & -c & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo l'ultima riga per applicare il primo teorema di Laplace

$$detB = \frac{(4c + 1)}{16} \rightarrow$$

$detB > 0 \rightarrow c > -\frac{1}{4}$
$detB = 0 \rightarrow c = -\frac{1}{4}$
$detB < 0 \rightarrow c < -\frac{1}{4}$ In modo analogo calcoliamo il $detA$

$$detA = -\frac{(4c^2 + c)}{4}$$

Se $detB = 0 \rightarrow c = -\frac{1}{4} \rightarrow$ Quadrica degenere con $detA = 0 \rightarrow$ Cilindro.
Se $detB \neq 0 \rightarrow c \neq -\frac{1}{4} \rightarrow$ Quadriche non degeneri.
In particolare
a)se $detA = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow$ Paraboloide ed è iperbolico poichè il $detB > 0$.
b)se $detA \neq 0 \rightarrow c \neq 0 \rightarrow$ Iperboloidi o Ellissoidi . Esse sono iperboloidi poichè dal polinomio caratteristico di A si vede che

$$P_A(T) = -T^3 - cT^2 + \frac{4c^2 + (2c + 1)^2}{4} + etc..$$

dove $(4c^2 + (2c + 1)^2) > 0$ $\forall c$ quindi i coefficienti del polinomio caratteristico non sono a segni alternati e non sono dello stesso segno. Inoltre si tratta di iperboloidi iperbolici se $c > -\frac{1}{4}$ e di iperboloidi ellittici se $c < -\frac{1}{4}$.