CdL in Ingegneria Gestionale e CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Risoluzione della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria- Compito A-**
3 Settembre 2008

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & h & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & k \end{pmatrix}$$

dove h e k sono parametri reali.

1) Verificare che i vettori $f(e_1)$, $f(e_2)$ appartengono al sottospazio $H = \{(x, y, z, t) \mid 2y + 6z + t = 0\}$. Determinare h e k in modo che $Imf \subseteq H$.

2) Nel caso $k = 6$, studiare l'endomorfismo f al variare di h.

3) Assegnati $v = (-2, 1, 0, 1)$ e $W = \mathcal{L}(e_1, v)$ determinare la dimensione dello spazio vettoriale $f(W)$.

4) Nel caso $h = 4$ e $k = 6$ studiare la semplicità dell'endomorfismo $\overline{f} : \ Imf \to Imf$ restrizione di f.

Risoluzione

1) Per verificare che i vettori $f(e_1)$, $f(e_2)$ appartengono al sottospazio H bisogna verificare che la prima e la seconda colonna della matrice data soddisfino l'equazione cartesiana di H: -2+0+2=0;
6-6+0=0.
Per determinare h e k in modo che $Imf \subseteq H$ anche $f(e_3)$, $f(e_4)$ devono appartenere a H :
$2h - 6 - 2 = 0 \to h = 4; -12 + 6 + k = 0 \to k = 6$.

2) Assegnato $k = 6$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & h & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ risulta:

$$detM^{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = 0 \forall h.$$

$\Rightarrow$ si ha che il rango della matrice non è 4, quindi

$$dimImf \leq 3$$

- se $h = 4 \Rightarrow\rightarrow dimImf = 2 \rightarrow Imf = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(2,3,-1,0)) \rightarrow dimKerf = 2, Kerf = \{(-3y-2z, y, z, y+z)\}$
- oppure se $h \neq 4$, il rango della matrice risulta 3 quindi
$Imf = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(2,3,-1,0),(1,h,-1,-2)) \rightarrow dimKerf = 1, Kerf = \{(-3y, y, 0, y)\}$

3) Per precisare la dimensione dello spazio vettoriale $f(W)$ dobbiamo conoscere le immagini di e_1 e di v :
$f(e_1) = (1,-1,0.2)$
$$f(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & h & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,-1,0.2)$$
ne segue che la $dimf(W) = 1$.

4) Se $h = 4 \Rightarrow\rightarrow dimImf = 2 \rightarrow Imf = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(2,3,-1,0))$ quindi chiamiamo la base del nostro dominio $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,-1,0,2), v_2 = (2,3,-1,0)\}$ dove
$f(v_1) = (1,-16,3,14) = xv_1 + yv_2 = (x+2y, -x+3y, -y, 2x) = (7,-3)_{\mathcal{B}}$
$f(v_2) = (7,3,-2,6) = xv_1 + yv_2 = (x+2y, -x+3y, -y, 2x) = (3,2)_{\mathcal{B}}$
$M^{B,B}(\overline{f}) = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ Il polinomio caratteristico : $P(T) = T^2 - 9T + 23 = 0$ ha il $\Delta < 0$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare i piani paralleli alla retta
$$r : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$
perpendicolari al piano $\pi :\ x - 2y + z - 6 = 0$ ed aventi distanza $\sqrt{2}$ dal punto $B = (0,1,-4)$.

2) Trovare la parabola p del piano $z = 0$ passante per l'origine O, avente nel punto $(-1,0,0)$ retta tangente $x + y + 1 = z = 0$ e asse di simmetria parallelo a $v = i + j$.

3) Tra la quadriche contenenti $p :\ x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = z = 0$ studiare quelle che sono secate dai piani coordinati $x = 0$ e $y = 0$ in circonferenze.

4) Dato il paraboloide ellittico $\mathcal{P} :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + x - 3y = 0$ determinare la conica sezione $\Gamma = \mathcal{P} \cap \pi$ con π piano tangente a $\mathcal{P}$ nell'origine.

Risoluzione

1) Dato il piano generico $ax + by + cz + d = 0$ affichè 1) esso sia parallelo alla retta r : $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ deve accadere che il vettore direttivo del piano (a,b,c) deve essere ortogonale al vettore direttivo della retta (1,1,1)(cioè $(a,b,c) * (1,1,1) = 0$). Inoltre il piano generico $ax + by + cz + d = 0$ deve essere perpendicolare al piano $\pi :\ \ x - 2y + z - 6 = 0$ (cioè

$(a,b,c)*(1,-2,1)=0)$. Da cui il sistema $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-c \end{cases} \rightarrow (-c,0,c) \rightarrow$ Il vettore direttivo dei piani cercati è $(-1,0,1)$. Quindi il piano generico è diventato $-x+z+d=0$. Affinchè i piani cercati abbiano distanza $\sqrt{2}$ dal punto $B=(0,1,-4)$ deve accadere che

$$\frac{|-4+d|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \rightarrow (-4+d)^2=4 \rightarrow d^2-8d+12=0 \rightarrow d=2; d=6$$

I piani cercati sono due:
$\pi_1 : x-z-2=0$
$\pi_2 : x-z-6=0.$

2) Sapendo che la parabola è tangente nel punto improprio del suo asse di simmetria alla retta impropria di equazione $t=0$ e sapendo che nel punto$(-1,0)$ è tangente alla retta $x+y+1=0$ possiamo impostare un fascio di coniche bitangenti. E' noto che $v=i+j(1,0)+(0,1)=(1,1) \rightarrow P^{\infty}=(1,1,0)$. Calcoliamo la retta passante per il punto proprio $(-1,0)$ e il punto improprio $P^{\infty}=(1,1,0)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \rightarrow \frac{x-(1)}{1}=\frac{y-0}{1} \rightarrow x-y+1=0$$

Il fascio di coniche bitangenti risulta:

$$t(x+y+1)+\lambda(x-y+1)^2=0$$

Imponiamo il passaggio per il punto di origine e troviamo il valore di λ per cui si ottiene una parabola: $1+\lambda=0 \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow x^2+y^2-2xy+x-3y=z=0$.

3) Scriviamo la quadrica contenente la parabola:

$$z(ax+by+cz+d)+x^2+y^2-2xy+x-3y=0$$

Essa la intersechiamo una volta con $x=0$ e una volta con $y=0$.
$\begin{cases} z(ax+by+cz+d)+x^2+y^2-2xy+x-3y=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} byz+cz^2+dz+y^2-3y=0 \\ x=0 \end{cases}$
Affinchè tale sezione sia una circonferenza $a_{11}=a_{22}\neq 0, a_{12}=0 \rightarrow c=1, b=0$.
In modo analogo $\begin{cases} z(ax+by+cz+d)+x^2+y^2-2xy+x-3y=0 \\ y=0 \end{cases}$
$\begin{cases} axz+cz^2+dz+x^2+x=0 \\ y=0 \end{cases}$
Affinchè tale sezione sia una circonferenza $a_{11}=a_{22}\neq 0, a_{12}=0 \rightarrow c=1, a=0$. Il fascio di quadriche contenenti la parabola è diventato

$$x^2+y^2+z^2-2xy+x-3y+dz=0$$

La matrice B associata a tale fascio

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{d}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo la terza riga per applicare il primo teorema di Laplace

$$detB = -1 \rightarrow detB < 0.$$

In modo analogo calcoliamo il $detA$

$$detA = 0 \rightarrow PARABOLIODI\ ELLITTICI\ \forall d$$

4) E' noto che la conica sezione tra una quadrica e un suo piano tangente sia una conica spezzata. Nel nostro caso il piano tangente nell'origine è il complesso dei termini di primo grado $\rightarrow x - 3y = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2xy = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ $\begin{cases} (x-y)^2 + z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ la conica sezione si spezza in due rette immaginarie e coniugate: $x - y + iz = 0$, e $x - y - iz = 0$.